au C.N.R.S.
A.O. 8227

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

M. BALMINO Georges

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la thèse

CONTRIBUTION A L'AMÉLIORATION DU POTENTIEL TERRESTRE : Choix d'une représentation. Techniques nouvelles de détermination.

Soutenue le 3 Avril 1973 devant la commission d'examen :

MM.	Y. THIRY	Président
	F. BARLIER	Examinateurs
	F. NAHON	
	J. KOVALEVSKY	

au C.N.R.S.
A.O. 8227

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ PARIS VI

par

M. BALMINO Georges

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la thèse

CONTRIBUTION A L'AMÉLIORATION DU POTENTIEL TERRESTRE : Choix d'une représentation. Techniques nouvelles de détermination.

Soutenue le 3 Avril 1973 devant la commission d'examen :

MM.	Y. THIRY	Président
	F. BARLIER	Examinateurs
	F. NAHON	
	J. KOVALEVSKY	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

CONTRIBUTION A L' AMELIORATION
DU POTENTIEL TERRESTRE :

Choix d'une Représentation
Techniques nouvelles de détermination

-:-:-:-:-:-

AVERTISSEMENT

Nous donnons ici un résumé des principales méthodes étudiées, et des résultats les plus importants qui figurent dans les rapports et publications numérotées : 1,2,3,6,11,13,15,16,17,18,20,24,26, et 27, dans les références que l'on consultera en fin de texte.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548009_0030

Notations utilisées

a_e = rayon équatorial de l'ellipsoide terrestre = 6378.155 Km

α = aplatissement " " " " = 1/298.255

GM = constante de la gravitation X masse de la terre = 398 601.3 Km^3/s^2

ω = taux moyen de rotation de la terre = $2\pi/86164$ rd/s

$\left\{ \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\}$ = coefficients du développement du potentiel terrestre en harmoniques sphériques.

J_n = C_{n0} (harmoniques zonaux)

r = distance géocentrique
φ = latitude géocentrique
λ = longitude
} coordonnées sphériques d'un point dans le système terrestre.

U = potentiel terrestre

E = potentiel de référence

T = potentiel perturbateur : U - E

$P_{lm}(u)$ = fonction de Legendre = $\frac{(1-u^2)^{m/2}}{2^l \; l!} \; \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} \left[(u^2-1)^l \right]$

(degré l, ordre m).

$\overline{P}_{lm}(u)$ = fonction normalisée.

$C^*_{2p,0}$ = harmoniques zonaux de l'ellipsoide de référence

SE II = modèle de potentiel de la Standard Earth du Smithsonian Astrophysical Observatory (1969)

U_0 = potentiel de la S.E. II du S.A.O, représenté à l'aide d'harmoniques sphériques

U_M = potentiel représenté à l'aide de E et du potentiel de masses ponctuelles.

dv = élément de volume

ds = élément de surface

$\overline{V}$ = désigne le vecteur $\vec{V}$, ou la matrice unicolonne de ses composantes.

Δh = hauteur du géoide au-dessus d'une surface de référence

Δg = anomalie de gravité sur la surface de référence.

σ = erreur quadratique moyenne (sigma)

$\begin{pmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ M \end{pmatrix}$ = éléments osculateurs d'une orbite à un instant donné : (demi grand axe, excentricité, inclinaison, longitude du noeud, argument du périgée, anomalie moyenne)

$\overline{W_{kj}}$ fonctions de Giacaglia normalisées.

$H(\Phi, \Lambda, t_0)$ = mesure altimétrique

$\mathcal{H}(\psi)$ = fonction d'autocorrélation du champ Δh dans une région R

$\mathcal{K}(\psi)$ = fonction d'autocorrélation du champ Δh sur toute la sphère.

INTRODUCTION

La détermination du potentiel terrestre ne doit plus être envisagée pour elle-même, mais à des fins géophysiques ainsi que pour la prévision hautement précise des trajectoires de satellites artificiels (application à la navigation, à la détermination de la position de balises en général).

Jusqu'à ce jour, les principaux résultats acquis en géodésie dynamique sont tous basés sur une représentation du potentiel terrestre en harmoniques sphériques et sur des méthodes d'analyse traitant globalement l'ensemble des mesures faites en différentes stations d'observations, la théorie de base étant la même dans tous les cas. Les stations doivent être nombreuses et bien réparties à la surface du globe afin d'assurer une couverture excellente des arcs observés ; les orbites doivent être d'inclinaisons, d'altitudes et d'excentricité variées afin de réaliser une bonne séparation des coefficients des perturbations qu'elles subissent. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques très lourdes, itératives , mettant en jeu la manipulation (l'inversion surtout) d'énormes matrices, et somme toute difficilement répétables lorsque de nouveaux lots de mesures sont disponibles.

De la connaissance du développement en harmoniques sphériques, on déduit aisément la forme du géoide, ou plus précisément la hauteur du géoide au-dessus d'un ellipsoide de référence, ou le champ des anomalies de gravité à la surface de cet ellipsoide [1] , [36] , [40].

Si l'on suppose donc connus les termes (C_{nm} , S_{nm}) du potentiel jusqu'au degré N, cela fournit la connaissance "d'ondulations" du géoide de demi-longueur d'onde π/N . Or, les meilleurs modèles actuellement publiés : Standard Earth II du Smithsonian Astrophysical Observatory [34] , modèles GEM1 à GEM4 du Goddard Space Flight center [47] ne sont complets que jusqu'au degré 16 - et encore avec l'aide de données gravimétriques - et ne peuvent donc rendre compte que de détails d'étendue supérieure à 1 250 Km (à l'équateur). Il est donc nécessaire, si l'on veut représenter des détails plus fins , de posséder un développement jusqu'à un ordre plus élevé. Mais la méthode dynamique globale reposant sur l'analyse des trajectoires ne permet pas de déterminer ces termes du fait de l'insensibilité progressive des orbites à ces détails - décroissance de l'accélération perturbatrice en $(n+1)\frac{1}{r^2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n\begin{Bmatrix}C_{nm}\\S_{nm}\end{Bmatrix}$ (excepté les termes de résonance).

Cependant, l'interprétation physique de certaines particularités du potentiel ne devient intéressante que si celui-ci est connu partout, et principalement lorsque les détails accessibles sont relativement petits. Le champ des anomalies de gravité à la surface,par exemple, peut être considéré valablement comme une condition aux limites dans un problème d'inversion utilisant d'autres données géophysiques,(sismologie, flux de chaleur, estimation de contraintes) et pouvant contribuer à une modélisation de l'intérieur de notre planète.

Par ailleurs, il est avantageux, pour certains systèmes de navigation, de faire suivre à un satellite, grâce à des micro poussées, une orbite soit prédéterminée, soit essentiellement gravitionnelle en compensant au mieux les forces telles que freinage atmosphérique et pression de radiation. Dans les deux cas, et afin de minimiser la masse de gaz embarquée à bord du satellite et nécessaire aux corrections, une très bonne connaissance du potentiel terrestre est requise.

Actuellement, on constate des écarts de plusieurs dizaines de mètres en quelques jours entre des éphémérides établies avec différents modèles de potentiel. Dans ce domaine donc, des améliorations sont aussi nécessaires.

Enfin, les progrès technologiques accomplis dans le domaine des satellites eux-mêmes, et des moyens de mesure, vont permettre d'améliorer considérablement la connaissance du champ de gravitation terrestre : soit en disposant d'orbites très basses (250 - 300 Km) mais en adjoignant aux satellites un dispositif de compensation de trainée - système "drag-free" -, soit en déterminant directement la forme du géoide par altimétrie, soit en disposant deux satellites identiques sur des orbites très voisines et en analysant les variations de vitesse radiale inter-satellites (donc une équipotentielle à l'altitude de l'orbite).

Dans un futur proche, il sera donc possible de faire la liaison entre les anomalies de grande étendue telles que nous les connaissons par méthode dynamique, et les informations données par la gravimétrie où les détails locaux seuls sont bien représentés (dans certaines régions du globe).

Les harmoniques sphériques s'avèrent mal adaptés à ce stade, car tout détail supplémentaire (représenté par exemple par un creux du geoide) modifie <u>tous les coefficients</u> de la série.

Nous nous sommes donc consacrés à la recherche de fonctions spéciales qui, tout en représentant globalement le potentiel, auraient chacune une valeur prépondérante, par rapport aux autres, en certains points du globe. Le développement du potentiel en série de ces fonctions devra finalement comporter autant de termes que de détails déterminés (fournis par exemple par un altimètre, ou par la gravimétrie), mais dans chaque région, <u>un seul terme pratiquement sera significatif</u> et devra être considéré dans les calculs, d'où un allègement appréciable de la méthode.

Deux types de représentation ont retenu notre attention : la première par "harmoniques excentrés" étudiée initialement par Mr. Dufour [32], la seconde par fonction harmoniques spéciales introduite par Lundquist et Giacaglia [42].

Pour l'une nous nous sommes attaché à examiner toutes les propriétés de ces fonctions, nous les avons construites numériquement et avons défini leur application à la restitution fine du géoide ; pour l'autre, qui n'est autre qu'une représentation par masses ponctuelles, nous avons étudié le problème sous différents aspects : stricte représentation mathématique, puis lien avec des traits physiques existants, calcul de plusieurs modèles, restitution du géoide et enfin application à la restitution de trajectoires par correction différentielle d'orbite utilisant des observations réelles, et amélioration du modèle à partir de mesures directes, de type altimétrique par exemple.

Nous avons ensuite étudié les possibilités d'amélioration du potentiel terrestre à l'aide : de satellites bas pour la détermination directe d'anomalies de densité type "mascons" lunaires (dans le cadre d'une représentation par masses) ; de satellites "jumeaux" sur une même orbite; d'un altimètre embarqué sur satellite. Dans ce dernier cas, nous avons particulièrement défini l'apport des mesures altimétriques par rapport aux observations classiques, l'utilisation réelle de ces mesures à la détermination du géoide, et un mode de traitement statistique approprié.

Nous examinerons successivement ces différents problèmes, résumerons les méthodes utilisées et citerons les principaux résultats obtenus.

1 - REPRESENTATION DU POTENTIEL TERRESTRE

1.1 - Idée Générale

Pour représenter certaines anomalies du géoide comme la fosse de Porto-Rico où l'on constate, d'après les mesures gravimétriques, une dénivellation de 20 m en un degré de latitude, il faudrait un développement en harmoniques sphériques jusqu'au degré 180, ce qui implique la détermination globale de 32 761 termes ! ... par la méthode dynamique classique. Il faut donc changer de mode de représentation et de type de mesures - ou d'orbites. Les représentations auxquelles on est conduit doivent vérifier une, ou plusieurs si possible , des conditions suivantes :

(C1) Discrétisation du champ terrestre qui s'adapte aux moyens de calcul (programmation "uniforme" et simple).

(C2) Représentation identique du potentiel perturbateur à l'extérieur et à la surface de la terre (pour un mélange aisé de différents types de données).

(C3) Possibilité d'augmenter localement le nombre des paramètres (afin de représenter des zones de façon détaillée), sans perturber les zones lointaines.

Cette dernière condition constitue une propriété de "régionalisation", et est la plus difficile à remplir.

On peut envisager :

- un potentiel de simple couche : une telle représentation est alléchante car la densité relative surfacique est une fonction linéaire de l'anomalie de gravité et du potentiel perturbateur au point considéré [24] ... mais les conditions (C2) et (C3) ne sont pas remplies.
- une représentation numérique du champ gravitationnel à la surface de la terre, utilisant des valeurs moyennes, sur des carrés curvilignes, de la hauteur du géoide ou des anomalies de gravité. Dans de dernier cas par exemple, le champ extérieur se calcule par intégration (C2 n'est pas vérifiée), mais fait intervenir la fonction de Stokes

généralisée qui possède la propriété (C3) à un certain degré [24, 3ème partie] .

- une représentation du potentiel perturbateur (différence entre le potentiel vrai et le potentiel d'un ellipsoide de référence, par exemple) par masses ponctuelles intérieures à la terre. Les deux premières conditions sont parfaitement vérifiées ; pour la troisième, tout dépend en fait de la valeur des masses et de la distance relative : masse - point considéré. Par exemple, pour un satellite à 500 Km d'altitude et une masse située à 1 200 Km de profondeur et de valeur relative ε (l'unité est la masse M de la terre), l'accélération perturbatrice γ_ε à une distance géocentrique ψ est approximativement donnée par :

$$\frac{1}{\varepsilon}\gamma_\varepsilon = \frac{1.3 \quad 10^2}{24 - 23\cos\psi} \quad , \quad \frac{m}{s^2} \ , \qquad (1)$$

et est représentée par la figure ci-après :

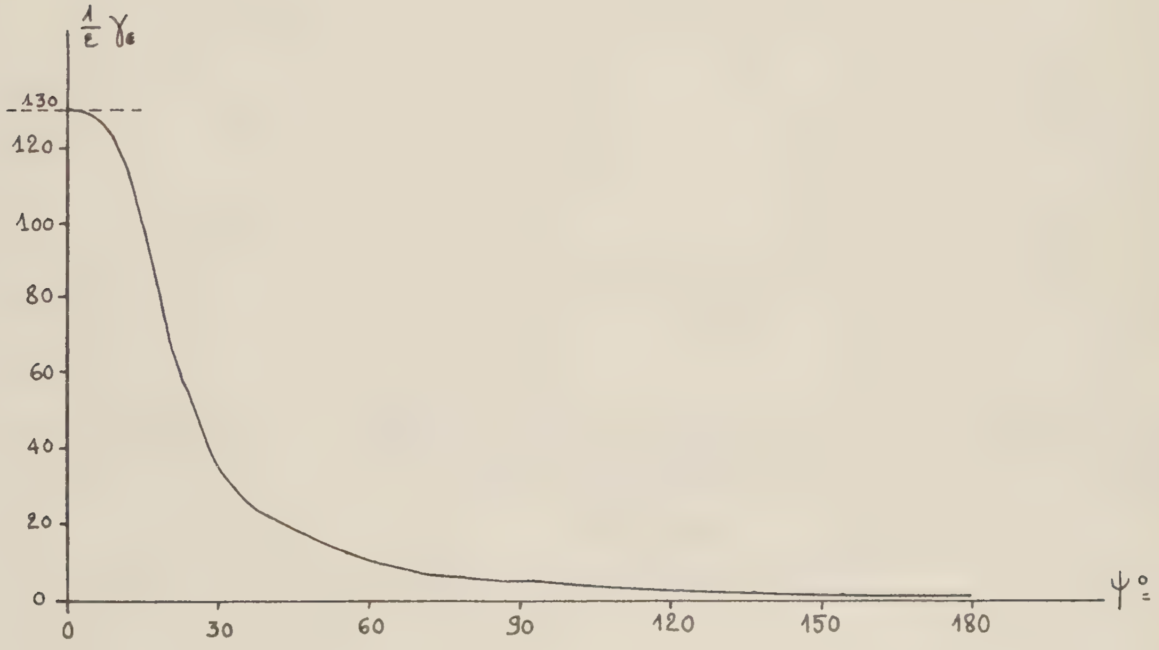


fig. 1 : Décroissance de γ_ε en fonction de ψ.

Suivant la valeur du potentiel de référence - et que nous discuterons plus loin - on peut donc considérer que (C3) est assez bien vérifiée.

- une représentation par des fonctions équivalentes aux harmoniques sphériques - qui sont malgré tout très pratiques pour la formulation analytique des perturbations d'orbites dans le champ extérieur - mais vérifiant la condition de régionalisation [42] .

Ce sont ces deux derniers types que nous avons étudiés.

1.2. Représentation par masses ponctuelles :

Le potentiel terrestre U étant rigoureusement l'intégrale, étendue à l'intérieur de la terre, du potentiel newtonien de masses élémentaires, on peut approximer cette intégrale par :

$$U = GM \sum_{k} \frac{\varepsilon_k}{r_k}$$

où les masses ε_k sont positives, ou par :

$$U = E + \sum_{k=1}^{N} G \frac{\varepsilon_k M}{r_k} \tag{2}$$

avec : E = potentiel de référence

$GM \sum_{k} \frac{\varepsilon_k}{r_k} = T$ = potentiel perturbateur, les ε_k étant algébriques et correspondant cette fois à des anomalies de densité supérieure ou inférieure, au point M_k , à la densité environnante.

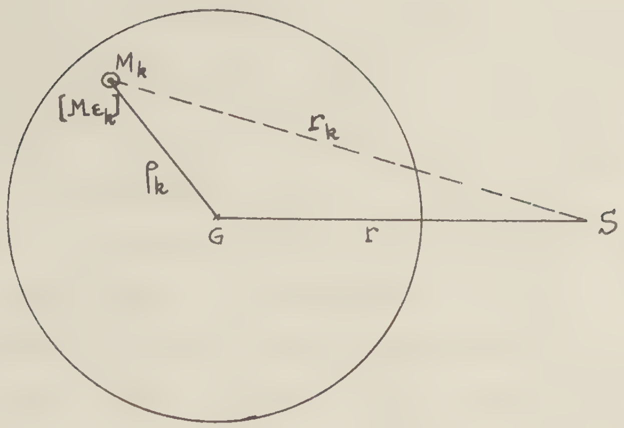


fig. 2 : Harmoniques excentrés.

La réduction de "l'anomalie" à une masse ponctuelle impose une symétrie sphérique à ces anomalies. La découverte des "mass concentrations" sur la Lune ("mascons") est une raison supplémentaire d'essayer de représenter T comme une somme finie de potentiels newtoniens.

A priori, pour la Terre, peu d'indications scientifiques existent quant à l'emplacement de ces masses et il est impossible, le géoide seul étant connu , de restituer la configuration intérieure des masses.

Différentes conceptions peuvent s'opposer pour leur répartition : on peut s'appuyer sur des caractéristiques a priori connues du potentiel terrestre et placer les masses aux puits de potentiel (Balmino); un point de vue plus mathématique (Dufour [32]) considère que le potentiel est une fonction très générale dont on cherche une représentation par des répartitions à deux variables.

Dans un premier stade, un des intérêts du formalisme est le nombre de paramètres à déterminer. Le modèle de potentiel le plus complet du S.A.O. par exemple, comporte 316 termes. Une masse représentant 4 paramètres (sa valeur et ses 3 coordonnées) est-ce à dire que 80 masses suffisent à rendre compte parfaitement du potentiel sous sa forme actuelle ? ... En fait à chaque masse correspondent une infinité d'harmoniques qui peuvent avoir une influence non négligeable du point de vue dynamique et gravimétrique et les deux représentations ne peuvent être équivalentes dans la pratique.

C'est pourquoi différentes tentatives de représentation exacte d'une partie des coefficients (harmoniques zonaux), ou de tous les coefficients du modèle S.E. II ont échoué [1] , [24] : la configuration étant <u>fixée</u>, nous avons tenté de déterminer : soit 22 masses sur l'axe de rotation de la terre, équivalentes aux 21 harmoniques zonaux (et au terme central GM/r) du modèle SE II, soit 289 masses correspondant au développement complet de ce modèle jusqu'au degré 16. Dans les deux cas, les harmoniques en question sont parfaitement restitués, mais les valeurs relatives des masses sont aberrantes ainsi que les harmoniques de degré supérieur à 16 (si bien que le géoide est sans signification). Ceci explique également l'échec partiel des premiers essais [32] , [33] de représentation de ce type, où l'on essayait de reconstituer les harmoniques sphériques connus avec un nombre réduit de masses (50 à 80), de positions arbitrairement fixées.

Nous avons donc préféré déterminer les masses en réalisant l'équivalence, suivant un critère de moindres carrés (choisi simplement comme technique de minimisation d'écarts), du potentiel dû aux masses et de celui développé en harmoniques sphériques, en de nombreux points extérieurs à la terre, ou sur sa surface.

Le potentiel de référence E étant celui d'un ellipsoide de même masse que la Terre, de même centre d'inertie, de mêmes axe et taux de rotation, de demi-grand axe équatorial a_e , d'aplatissement α , et qui soit une équipotentielle du champ de pesanteur, on essaye de représenter le champ réel de la terre, pris égal à celui de la S.E. II sous la forme :

$$U_0 = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{\ell \geq 1} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} P_{\ell m}(\sin\varphi) \cdot \left(C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda \right) \right\} \qquad (3)$$

par :

$$U_M = \frac{GM}{r}\left\{1 + \sum_{p \geq 1}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2p} C^*_{2p,0} \; P_{2p,0}(\sin\varphi)\right\} + $$
$$+ \; GM \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon_k}{r_k} \; . \qquad (4)$$

$\mathcal{D}$ étant un domaine extérieur à la terre et $\mathcal{S}$ la surface de l'ellipsoide, on détermine les paramètres inconnus (ε_k , ρ_k , φ_k , λ_k) en minimisant les écarts entre $T_0 = U_0 - E$ et $T_M = U_M - E$, ou entre des fonctions qui leur sont liées, c'est-à-dire en réalisant une ou plusieurs des conditions ci-après :

$$\left\{ \iiint_{\mathcal{D}} \left| U_0 - U_M \right|^2 dv \right\} \text{ minimum} \qquad (5/1)$$

$$\left\{ \iiint_{\mathcal{D}} \left| \overline{\nabla} U_0 - \overline{\nabla} U_M \right|^2 dv \right\} \text{ minimum} \qquad (5/2)$$

$$\left\{ \iint_{\mathcal{S}} \left| \Delta h_0 - \Delta h_M \right|^2 ds \right\} \text{ minimum} \qquad (5/3)$$

$$\left\{ \iint_{\mathcal{S}} \left| \Delta g_0 - \Delta g_M \right|^2 ds \right\} \text{ minimum} \qquad (5/4)$$

avec :

$\overline{\nabla} U_0 = \text{gradient} \begin{pmatrix} \partial U_0/\partial x \\ \partial U_0/\partial y \\ \partial U_0/\partial z \end{pmatrix}$ de U_0 , dans le système terrestre [5]

$\Delta h_0 = T_0 \; a_e^2/GM$ = hauteur du géoide correspondant à U_0

$\Delta g_0 = -\dfrac{\partial T_0}{\partial r} - \dfrac{2\,T_0}{r}$ = anomalie de gravité correspondant à U_0

et :

$$\overline{\nabla} U_M = \overline{\nabla} E - GM \sum_k \varepsilon_k \frac{\overline{r_k}}{r_k^3}$$

$$\Delta h_M = a_e^2 \sum_k \frac{\varepsilon_k}{r_k}$$

$$\Delta g_M = GM \sum_k \frac{\varepsilon_k}{r\, r_k} \left(\frac{\overline{r} \cdot \overline{r_k}}{r_k^2} - 2 \right)$$

De plus, nous avons introduit les contraintes :

$$\sum_k \varepsilon_k = 0 \qquad (6/1)$$

$$\sum_k \varepsilon_k \overline{\rho_k} = \overline{0} \qquad (6/2)$$

relatives à la conservation de la masse et du centre d'inertie de la Terre. Dans les premiers modèles que nous avons construits, nous avons parfois inclu d'autres contraintes sur le tenseur d'inertie de la distribution. (Cela revient en fait à imposer les coefficients du potentiel jusqu'au degré 2 inclus, [3] , [24]).

Les intégrales des conditions (5/1) à (5/4) sont approximées par des sommes finies étendues à un grand nombre de points répartis dans ($\mathcal{D}$) ou sur ($\mathcal{S}$) et l'on utilise la méthode des moindres carrés comme outil de minimisation, le poids des équations étant fonction généralement de l'altitude du point considéré. Les contraintes sont prises en compte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange [9] .

Il faut remarquer que le problème ainsi posé est linéaire par rapport aux masses ε_k , mais non par rapport à leurs coordonnées ρ_k , φ_k , λ_k , d'où la nécessité d'utiliser un processus itératif pour déterminer ces paramètres, la première itération servant à initialiser les ε_k .

La taille des systèmes à résoudre nous a conduit à rechercher des méthodes d'inversion très rapides et ne faisant intervenir qu'une partie de la matrice à la fois (pour des raisons de taille mémoire de l'ordinateur utilisé), [14] .

Nous avons ainsi développé une méthode d'inversion basée sur une décomposition en blocs de la matrice initiale, technique qui s'est avérée très performante [15] .

1.2.1. Les différents modèles.

Chaque solution obtenue est testée de différentes manières :

- Calcul des harmoniques sphériques de la distribution :

$$\overline{H}_{\ell m} = \overline{\gamma}_{\ell m} + i\,\overline{\sigma}_{\ell m} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k\, \overline{H}_{\ell m}^{k} \qquad (7)$$

avec :

$$\overline{H}_{\ell m}^{k} = \left(\frac{\rho_k}{a_e}\right)^{\ell} P_{\ell m}(\sin\varphi_k)\; Q_{\ell m}\; e^{i\, m \lambda_k} \qquad (8)$$

$$Q_{\ell m} = \left\{ \frac{(2-\delta_0^m)\;(\ell-m)!}{(2\ell+1)\;(\ell+m)!} \right\}^{1/2} \qquad (9)$$

et comparaison avec les harmoniques normalisés $\{\overline{C}_{\ell m}\,,\,\overline{S}_{\ell m}\}$ du modèle de référence.

- Intégration numérique du mouvement d'un satellite dans les champs U_0 et U_M , et comparaison des éphémérides obtenues sur un ou deux jours. La méthode utilisée est celle de Bulirsch et Stoer, décrite en [5] , et reconsidérée (sous une forme plus stable) en [6] .

- Restitution des anomalies de gravité et des hauteurs du géoide (sur $\mathcal{S}$) : comparaison des courbes de niveau obtenues avec U_0 et U_M [7] ; [8] .

- Analyse de la matrice des covariances des paramètres de la solution [10] : nous nous sommes en général limité à la recherche et l'examen des coefficients de corrélation importants.

la croûte. Un des résultats remarquables est la faible valeur des coefficients de corrélation (0.01 en moyenne) ce qui prouve que le choix des positions était judicieux. Cette solution est indiscutablement meilleure. Les écarts entre le potentiel de départ et le potentiel restitué sont dix fois plus petits que précédemment.

La recherche simultanée des paramètres (ε_k, ρ_k) à l'aide des conditions (5/1) et (5/4) a été un échec. Remarquons que la seule condition (5/4) ne peut permettre la détermination de la configuration alors que la considération de $U_0 - U_M$, sur une grille de points de $\mathcal{D}$, donne accès, si la grille est serrée, à $\overline{\nabla} U_0 - \overline{\nabla} U_M$; les dimensions des mailles de la grille sont très importantes. La représentation s'améliore beaucoup lorsque cette grille devient petite, mais il existe évidemment une limite. Nous pensons que les causes de cet échec sont : un déséquilibre numérique des blocs de la matrice normale du système (auquel on pourrait pallier peut-être par des combinaisons linéaires des paramètres ou par des changements d'unités); des points trop espacés dans $\mathcal{D}$, si bien que l'on réalise successivement des conditions $U_0 \simeq U_M$ à différentes altitudes et que l'on retombe dans une singularité prévue par la théorie du potentiel ...

Nous nous sommes donc tourné vers quelques propriétés locales des champs Δg_0 et Δh_0 ; la courbure moyenne $\overline{K}$ du géoide étant donnée par [2] :

$$\overline{K} = \frac{1}{2 \frac{\partial U_M}{\partial r}} \left(\frac{\partial^2 U_M}{\partial r^2} - 2\,\omega^2 \right) \qquad (10)$$

nous avons tenté de déterminer chaque couple (ε_k, ρ_k) par la seule considération de profils de Δh_0 et Δg_0, en réduisant Δh_M et Δg_M au seul terme dépendant effectivement de ε_k dans un voisinage du point étudié.

Une telle étude effectuée sur 21 des extrema les plus importants du champ Δg_0 a permis de déterminer des profondeurs variant, pour les masses correspondantes, entre 1 000 et 1 500 Km, plus satisfaisantes (d'après les tests

globaux) que la profondeur uniforme de 1 300 Km.

Nous avons finalement calculé quatre modèles, de 126 masses, obtenus respectivement à l'aide des conditions (5/1) à (5/4), pour une grille de 27 742 points de $\mathcal{D}$ (entre 300 et 1 500 Km d'altitude), - notons que chaque condition (5/2) représente trois équations - , et une grille de 21 931 points de $\mathcal{S}$. Ces modèles ont tous été testés et comparés ; de l'étude de leurs caractéristiques individuelles, et par un système de pondération tenant compte de leurs faiblesses, du nombre d'équations ayant construit chacun d'eux et des unités utilisées, nous avons déduit deux modèles mixtes [24] . Le plus complet, obtenu par combinaison de 154 830 équations sur U , $\overline{\nabla}$U , Δh et Δg , est des plus satisfaisant du point de vue comparaisons avec le modèle S.E. II. Nous donnons dans les pages qui suivent, les coordonnées et valeurs des masses de ce modèle, ainsi que les harmoniques sphériques de la distribution : J_n et ($\overline{C}_{\ell m}$, $\overline{S}_{\ell m}$) - jusqu'au degré 16 - ; J_2 est parfaitement représenté ainsi que les harmoniques zonaux et tesséraux jusqu'à l'ordre 11 au minimum (on constate encore un bon accord au-delà, pour certains termes).

1.2.2. Le géoide et la représentation des trajectoires.

La carte des courbes de niveau des hauteurs du géoide (à 10 m d'intervalle), obtenue à l'aide du dernier modèle mixte, est absolument identique à celle correspondant à la S.E.II (fig 3). Sur une grille très détaillée (pas de 2° en latitude, 3° en longitude), de résolution inférieure à celle des deux représentations, on constate que les écarts restent inférieurs à 3 m partout, ce qui correspond à la précision du géoide déduit de la S.E.II .

De même la représentation du champ des anomalies de gravité est satisfaisante (fig. 4), les écarts $|\Delta g_o - \Delta g_M|$ étant en moyenne inférieurs à 6 mgal.

N	φ	λ	ϖ	ε	N	φ	λ	ϖ	ε	N	φ	λ	ϖ	ε
1	59	-152	-1100	1.888	43	4	25	-1000	-1.821	85	85	100	-1100	1.246
2	3	-176	-1300	-0.272	44	18	29	-1300	2.315	86	-42	-35	-1500	-2.113
3	-66	-177	-1300	-2.173	45	30	25	-1300	-2.508	87	-42	-16	-1300	1.615
4	20	-160	-1300	0.988	46	45	26	-1000	1.540	88	26	126	-1300	-1.133
5	-31	-159	-1300	1.052	47	35	46	-1300	3.162	89	40	131	-1300	1.170
6	-15	-158	-1300	-0.141	48	21	50	-1300	-2.239	90	-19	160	-1200	1.262
7	-2	-155	-1300	1.048	49	-6	48	-1100	-1.748	91	39	-163	-1300	-0.950
8	22	-143	-1300	-1.274	50	-43	43	-1300	2.562	92	42	-17	-1100	-0.652
9	-27	-140	-1300	-2.032	51	-44	61	-1300	-1.358	93	43	-135	-1300	-1.389
10	32	-126	-1300	-2.505	52	-67	73	-1300	2.305	94	33	-144	-1300	0.991
11	3	-125	-1300	-1.737	53	-36	74	-1300	1.858	95	17	-134	-1300	1.116
12	-19	-121	-1300	0.890	54	4	79	-1000	-3.374	96	-51	-142	-1300	-0.433
13	-46	-121	-1500	2.171	55	41	68	-1300	-2.045	97	-34	-108	-1300	-0.464
14	47	-115	-1100	0.403	56	69	76	-1300	-2.125	98	44	-89	-1300	1.672
15	-12	-101	-1300	0.809	57	35	90	-1300	1.244	99	77	-121	-1300	-0.565
16	-49	-99	-1300	-1.918	58	-49	99	-1300	1.508	100	82	-78	-1300	-0.979
17	38	-98	-1300	-1.738	59	-25	98	-1300	-2.308	101	85	-20	-1300	0.241
18	-76	-95	-1300	-1.542	60	-1	112	-1300	2.102	102	71	-52	-1300	1.719
19	-35	-85	-1300	0.674	61	47	100	-1300	-2.696	103	37	-53	-1300	-0.290
20	-15	-85	-1000	-1.716	62	62	109	-1300	2.226	104	27	-44	-1300	0.998
21	60	-89	-1300	-2.861	63	12	124	-1300	1.758	105	58	-5	-1300	0.481
22	39	-71	-1300	-1.320	64	-21	121	-1300	0.791	106	-85	100	-1300	-0.278
23	0	-71	-1300	2.220	65	-38	122	-1300	-2.981	107	4	-28	-1300	0.299
24	-19	-69	-1300	1.898	66	-63	120	-1300	-1.818	108	-6	-11	-1300	-0.234
25	-54	-69	-1500	1.502	67	-4	142	-1100	1.808	109	-27	-16	-1300	-0.809
26	19	-64	-1300	-2.211	68	31	141	-1300	1.994	110	-73	-15	-1300	0.769
27	24	-28	-1300	-0.991	69	-42	152	-1500	-1.194	111	-61	-81	-1300	0.372
28	9	-49	-1300	-1.832	70	1	159	-1300	0.085	112	-33	-70	-1300	0.253
29	-14	-52	-1300	-1.024	71	39	160	-1300	-1.738	113	-23	-4	-1300	1.719
30	-36	-42	-1500	-0.374	72	57	158	-1300	2.463	114	-10	4	-1300	-0.375
31	42	-32	-1100	2.011	73	-47	135	-1300	1.271	115	-19	30	-1300	0.399
32	-18	-24	-1200	-1.078	74	-25	174	-1300	1.189	116	28	65	-1300	0.349
33	69	-20	-1300	1.727	75	22	101	-1300	-1.387	117	48	43	-1300	-1.968
34	60	-175	-1300	-0.844	76	68	133	-1300	-1.940	118	58	13	-1300	-0.590
35	9	-11	-1300	1.357	77	-9	30	-1300	0.273	119	16	145	-1300	-0.268
36	22	-4	-1300	-0.503	78	16	-94	-1300	0.571	120	-77	155	-1300	-0.512
37	-64	-25	-1500	0.674	79	10	50	-1300	1.200	121	-16	69	-1300	-0.138
38	39	-3	-1000	1.535	80	40	-112	-1300	2.179	122	-15	112	-1300	-0.432
39	-39	2	-1000	-0.643	81	58	-40	-1300	-0.259	123	-29	145	-1300	0.226
40	-50	15	-1300	0.867	82	58	53	-1300	1.602	124	23	165	-1300	-0.529
41	-66	21	-1300	-1.252	83	-18	-40	-1300	1.062	125	55	131	-1300	-0.701
42	-42	24	-1300	-0.361	84	-46	167	-1300	0.771	126	15	14	-1300	1.231

φ = LATITUDE (°) λ = LONGITUDE (°) ϖ = PROF. (KM) ε = MASSE (10^{-6} MASSE DE LA TERRE)

HARMONIQUES SPHERIQUES - Solution ($U + \overline{\nabla} U + \Delta h + \Delta g$)

TESSERAUX

C(2, 1)	= 0.24879943D-09	S(2, 1)	= -0.23054206D-09
C(2, 2)	= 0.24123997D-05	S(2, 2)	= -0.13639280D-05
C(3, 1)	= 0.19686258D-05	S(3, 1)	= 0.26074886D-06
C(3, 2)	= 0.89088921D-06	S(3, 2)	= -0.63395446D-06
C(3, 3)	= 0.68654152D-06	S(3, 3)	= 0.14328083D-05
C(4, 1)	= -0.53004013D-06	S(4, 1)	= -0.48550161D-06
C(4, 2)	= 0.33136958D-06	S(4, 2)	= 0.70795302D-06
C(4, 3)	= 0.99297620D-06	S(4, 3)	= -0.15393050D-06
C(4, 4)	= -0.79272703D-07	S(4, 4)	= 0.33397089D-06
C(5, 1)	= -0.49137567D-07	S(5, 1)	= -0.98612928D-07
C(5, 2)	= 0.61365803D-06	S(5, 2)	= -0.35716994D-06
C(5, 3)	= -0.42866523D-06	S(5, 3)	= -0.95386823D-07
C(5, 4)	= -0.27137651D-06	S(5, 4)	= 0.80075697D-07
C(5, 5)	= 0.12000065D-06	S(5, 5)	= -0.60784073D-06
C(6, 1)	= -0.10980546D-06	S(6, 1)	= 0.24310322D-07
C(6, 2)	= 0.56012264D-07	S(6, 2)	= -0.35070791D-06
C(6, 3)	= 0.22169465D-07	S(6, 3)	= 0.47583240D-07
C(6, 4)	= -0.72456462D-08	S(6, 4)	= -0.39734707D-06
C(6, 5)	= -0.21257016D-06	S(6, 5)	= -0.52089333D-06
C(6, 6)	= 0.10605489D-06	S(6, 6)	= -0.49294230D-07
C(7, 1)	= 0.24223118D-06	S(7, 1)	= 0.12197157D-06
C(7, 2)	= 0.28131405D-06	S(7, 2)	= 0.18146891D-06
C(7, 3)	= 0.19666382D-06	S(7, 3)	= -0.22273129D-06
C(7, 4)	= -0.18721006D-06	S(7, 4)	= -0.10481809D-06
C(7, 5)	= 0.43356883D-08	S(7, 5)	= 0.12316575D-06
C(7, 6)	= -0.25417890D-06	S(7, 6)	= 0.10618372D-06
C(7, 7)	= 0.16536843D-06	S(7, 7)	= -0.80549231D-07
C(8, 1)	= 0.33409783D-07	S(8, 1)	= 0.40129541D-07
C(8, 2)	= 0.47606242D-07	S(8, 2)	= 0.81904678D-07
C(8, 3)	= -0.31456325D-07	S(8, 3)	= 0.11163136D-07
C(8, 4)	= -0.13540549D-06	S(8, 4)	= 0.79337695D-07
C(8, 5)	= -0.61200386D-07	S(8, 5)	= 0.51379254D-07
C(8, 6)	= -0.71069256D-07	S(8, 6)	= 0.21450786D-06
C(8, 7)	= 0.66278404D-07	S(8, 7)	= 0.11082033D-06
C(8, 8)	= -0.14586182D-06	S(8, 8)	= 0.72186755D-07
C(9, 1)	= 0.12767153D-06	S(9, 1)	= -0.30668053D-07
C(9, 2)	= 0.26745223D-08	S(9, 2)	= -0.10690376D-06
C(9, 3)	= -0.93898192D-07	S(9, 3)	= -0.14836617D-06
C(9, 4)	= 0.16182636D-07	S(9, 4)	= 0.55721822D-07
~~C(9, 5)~~	~~= 0.31867459D-08~~	~~S(9, 5)~~	~~= -0.52809477D-07~~
C(9, 6)	= 0.80960659D-08	S(9, 6)	= 0.22253455D-06
C(9, 7)	= -0.61664802D-07	S(9, 7)	= -0.15793814D-06
C(9, 8)	= 0.17430751D-06	S(9, 8)	= 0.49229044D-07
C(9, 9)	= -0.10115852D-07	S(9, 9)	= 0.78677071D-07

Harmoniques Sphériques - Solution (U + $\overline{\nabla}$U + Δh + Δg) - suite.

C(10, 1) =	0.12556456D-06	S(10, 1) =	-0.11469315D-06
C(10, 2) =	-0.50767486D-07	S(10, 2) =	-0.11516222D-06
C(10, 3) =	-0.24934453D-07	S(10, 3) =	-0.12231358D-06
C(10, 4) =	-0.41307891D-07	S(10, 4) =	-0.43878352D-07
C(10, 5) =	-0.51180197D-07	S(10, 5) =	-0.86904111D-07
C(10, 6) =	-0.46347931D-07	S(10, 6) =	-0.14653262D-06
C(10, 7) =	0.67180077D-07	S(10, 7) =	0.19159328D-07
C(10, 8) =	0.11092823D-06	S(10, 8) =	-0.79067481D-07
C(10, 9) =	-0.40880116D-07	S(10, 9) =	0.41641050D-08
C(10,10) =	0.12863570D-06	S(10,10) =	-0.47320630D-07
C(11, 1) =	0.20999768D-07	S(11, 1) =	0.29138658D-07
C(11, 2) =	0.47782715D-07	S(11, 2) =	-0.82898429D-07
C(11, 3) =	-0.79596670D-07	S(11, 3) =	-0.11051983D-06
C(11, 4) =	-0.26964462D-07	S(11, 4) =	0.50349119D-07
C(11, 5) =	0.14682517D-07	S(11, 5) =	0.14547290D-06
C(11, 6) =	0.45720767D-07	S(11, 6) =	-0.57972211D-08
C(11, 7) =	0.43086581D-07	S(11, 7) =	-0.85850532D-07
C(11, 8) =	0.41397706D-07	S(11, 8) =	-0.24689653D-07
C(11, 9) =	0.14649492D-06	S(11, 9) =	-0.72005101D-08
C(11,10) =	-0.37290436D-07	S(11,10) =	-0.17256189D-07
C(11,11) =	0.86138327D-07	S(11,11) =	-0.49331490D-07
C(12, 1) =	-0.30276286D-07	S(12, 1) =	-0.51328775D-08
C(12, 2) =	0.45253563D-07	S(12, 2) =	0.58667513D-07
C(12, 3) =	0.49973658D-07	S(12, 3) =	0.29334759D-07
C(12, 4) =	-0.13281273D-07	S(12, 4) =	-0.13970371D-07
C(12, 5) =	0.19161002D-08	S(12, 5) =	0.72548072D-07
C(12, 6) =	0.39624377D-08	S(12, 6) =	0.10487035D-07
C(12, 7) =	0.10084075D-07	S(12, 7) =	0.86849715D-07
C(12, 8) =	0.26509314D-07	S(12, 8) =	0.56934553D-07
C(12, 9) =	0.90264252D-08	S(12, 9) =	0.54895232D-07
C(12,10) =	0.17975591D-07	S(12,10) =	-0.15950799D-07
C(12,11) =	-0.45904249D-07	S(12,11) =	-0.50546996D-08
C(12,12) =	0.11280768D-07	S(12,12) =	-0.32741832D-07
C(13, 1) =	-0.74386247D-07	S(13, 1) =	0.20291433D-07
C(13, 2) =	-0.37160778D-07	S(13, 2) =	0.18850473D-07
C(13, 3) =	0.55283418D-07	S(13, 3) =	-0.27917447D-07
C(13, 4) =	-0.31282060D-07	S(13, 4) =	0.48345162D-07
C(13, 5) =	0.59202244D-07	S(13, 5) =	-0.40747471D-07
C(13, 6) =	-0.59945534D-07	S(13, 6) =	0.20851994D-07
C(13, 7) =	-0.60195668D-07	S(13, 7) =	0.94778760D-08
C(13, 8) =	-0.17929548D-07	S(13, 8) =	-0.23534492D-08
C(13, 9) =	-0.21534838D-07	S(13, 9) =	0.54861046D-07
C(13,10) =	0.74847288D-07	S(13,10) =	0.51136385D-08
C(13,11) =	-0.37486053D-07	S(13,11) =	0.12085382D-07
C(13,12) =	0.24827374D-08	S(13,12) =	0.73777607D-07
C(13,13) =	-0.48328668D-07	S(13,13) =	0.78555785D-07
C(14, 1) =	-0.30432561D-07	S(14, 1) =	0.65310054D-07
C(14, 2) =	0.15893176D-07	S(14, 2) =	-0.59652324D-07
C(14, 3) =	0.81033090D-08	S(14, 3) =	0.25677712D-07
C(14, 4) =	-0.99383656D-08	S(14, 4) =	-0.30297290D-07
C(14, 5) =	-0.38946450D-07	S(14, 5) =	-0.26292669D-07
C(14, 6) =	0.11389927D-07	S(14, 6) =	-0.33792502D-07
C(14, 7) =	-0.24475920D-07	S(14, 7) =	0.19798808D-07
C(14, 8) =	-0.44648128D-07	S(14, 8) =	-0.27198896D-07
C(14, 9) =	0.37390870D-07	S(14, 9) =	0.46658418D-07
C(14,10) =	0.35451607D-07	S(14,10) =	-0.31452829D-07
C(14,11) =	-0.17819936D-07	S(14,11) =	-0.29593746D-07
C(14,12) =	-0.92699727D-08	S(14,12) =	-0.41140791D-07
C(14,13) =	0.11389925D-07	S(14,13) =	0.24974593D-07
C(14,14) =	-0.74140716D-07	S(14,14) =	0.11906534D-07

Harmoniques Sphériques - Solution $(U + \overline{\nabla}U + \Delta h + \Delta g)$ - Fin.

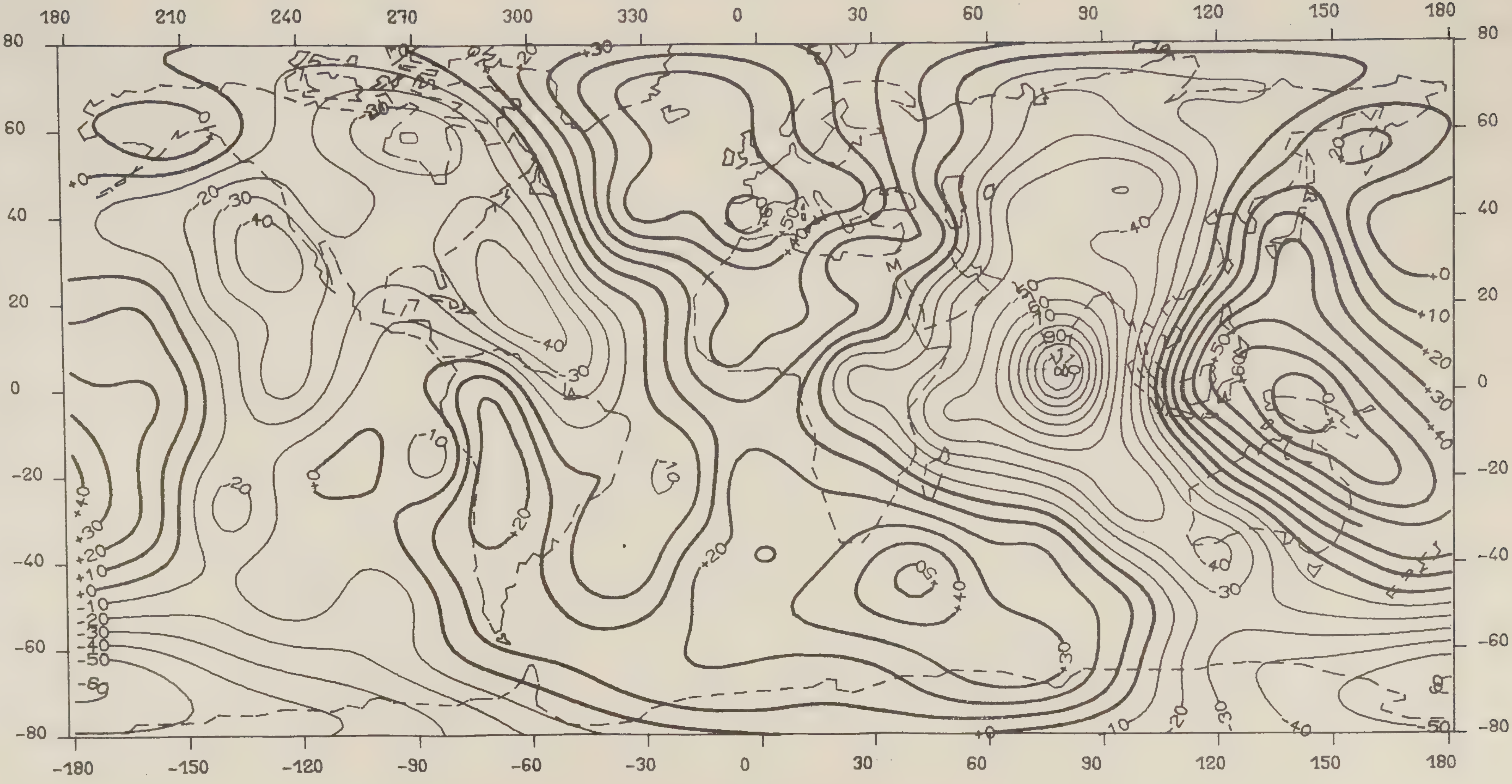
C(15, 1)	= -0.10386448D-07	S(15, 1)	= 0.62752086D-07
C(15, 2)	= -0.16410190D-07	S(15, 2)	= -0.16631619D-08
C(15, 3)	= -0.14561323D-08	S(15, 3)	= 0.22937470D-07
C(15, 4)	= 0.22479018D-07	S(15, 4)	= 0.28571026D-07
C(15, 5)	= -0.78918061D-08	S(15, 5)	= 0.37612594D-08
C(15, 6)	= 0.47804416D-07	S(15, 6)	= -0.86099093D-07
C(15, 7)	= 0.52247235D-07	S(15, 7)	= 0.17565249D-07
C(15, 8)	= -0.50653679D-07	S(15, 8)	= -0.20474282D-07
C(15, 9)	= 0.13241861D-07	S(15, 9)	= 0.16045957D-08
C(15,10)	= 0.54461518D-08	S(15,10)	= 0.50348177D-08
C(15,11)	= -0.36731603D-07	S(15,11)	= 0.42917295D-07
C(15,12)	= 0.15902533D-07	S(15,12)	= -0.62579284D-08
C(15,13)	= 0.10948686D-07	S(15,13)	= -0.19527886D-07
C(15,14)	= -0.19270969D-07	S(15,14)	= -0.33774290D-07
C(15,15)	= -0.10019827D-07	S(15,15)	= -0.29451083D-07
C(16, 1)	= -0.30204438D-08	S(16, 1)	= 0.53830171D-07
C(16, 2)	= -0.14983590D-08	S(16, 2)	= 0.11057675D-07
C(16, 3)	= -0.30685275D-07	S(16, 3)	= 0.10318119D-07
C(16, 4)	= -0.91152008D-09	S(16, 4)	= 0.81335530D-08
C(16, 5)	= -0.29715985D-07	S(16, 5)	= 0.13537006D-07
C(16, 6)	= -0.14010418D-07	S(16, 6)	= -0.22022635D-07
C(16, 7)	= 0.65674181D-07	S(16, 7)	= -0.18342108D-07
C(16, 8)	= -0.31820483D-07	S(16, 8)	= 0.14332085D-07
C(16, 9)	= -0.18949079D-08	S(16, 9)	= -0.46274518D-07
C(16,10)	= -0.17054159D-07	S(16,10)	= -0.85028561D-08
C(16,11)	= 0.11375721D-07	S(16,11)	= -0.37365966D-07
C(16,12)	= 0.49690802D-08	S(16,12)	= 0.97273834D-08
C(16,13)	= 0.26656940D-07	S(16,13)	= 0.40985143D-08
C(16,14)	= 0.17154275D-07	S(16,14)	= 0.56204191D-08
C(16,15)	= -0.15473719D-07	S(16,15)	= 0.27776200D-08
C(16,16)	= 0.12012990D-07	S(16,16)	= -0.11113100D-07

ZONAUX

1)	= 0.79646508D-17	J(2)	= 0.10826278D-02		
5)	= -0.24722718D-06	J(6)	= 0.51187294D-06		
9)	= -0.10499851D-07	J(10)	= -0.29821456D-06		
(13)	= -0.15397332D-06	J(14)	= -0.14332572D-06		
(17)	= 0.11844907D-06	J(18)	= 0.14223736D-07		
(21)	= 0.38505801D-07	J(22)	= -0.80722617D-08		
		J(3)	= -0.25375963D-05	J(4)	= -0.15886247D-05
		J(7)	= -0.31539533D-06	J(8)	= -0.18286747D-06
		J(11)	= 0.68790485D-08	J(12)	= 0.31602331D-07
		J(15)	= -0.17942857D-06	J(16)	= -0.23431706D-07
		J(19)	= -0.54005903D-07	J(20)	= -0.26916939D-07

Fig. 3

HAUTEURS DU GEOIDE

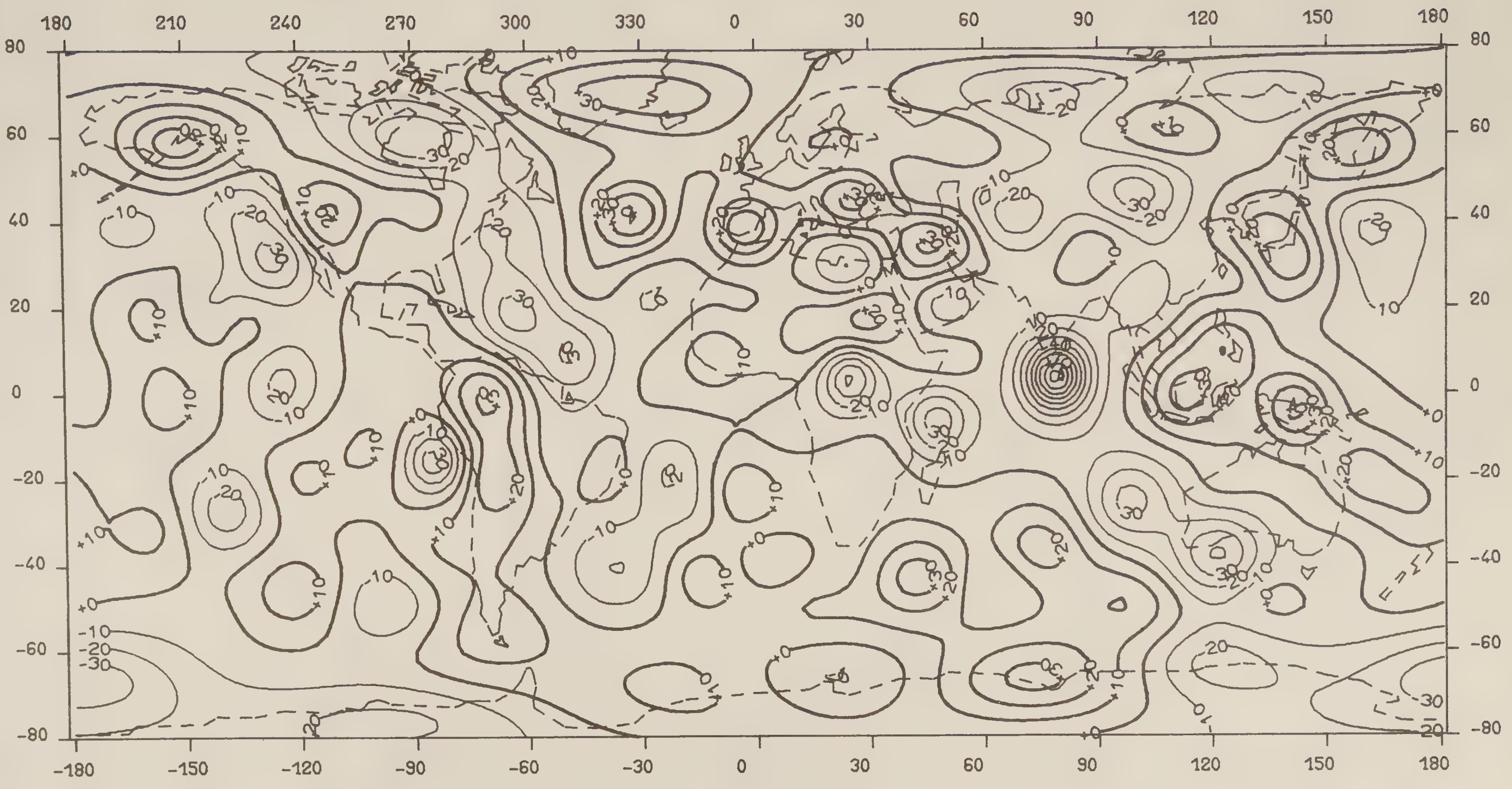


GEOIDE A = 6378.155 APL = 1./ 298.255 -ELLIPSOIDE-

Solution mixte $(U + \bar{\nabla} U + \Delta h + \Delta g)$

Fig. 4

ANOMALIES DE GRAVITE



GEOIDE A = 6378.155 APL = 1./ 298.255 -ELLIPSOIDE-

Solution mixte $(U + \bar{\nabla} U + \Delta h + \Delta g)$

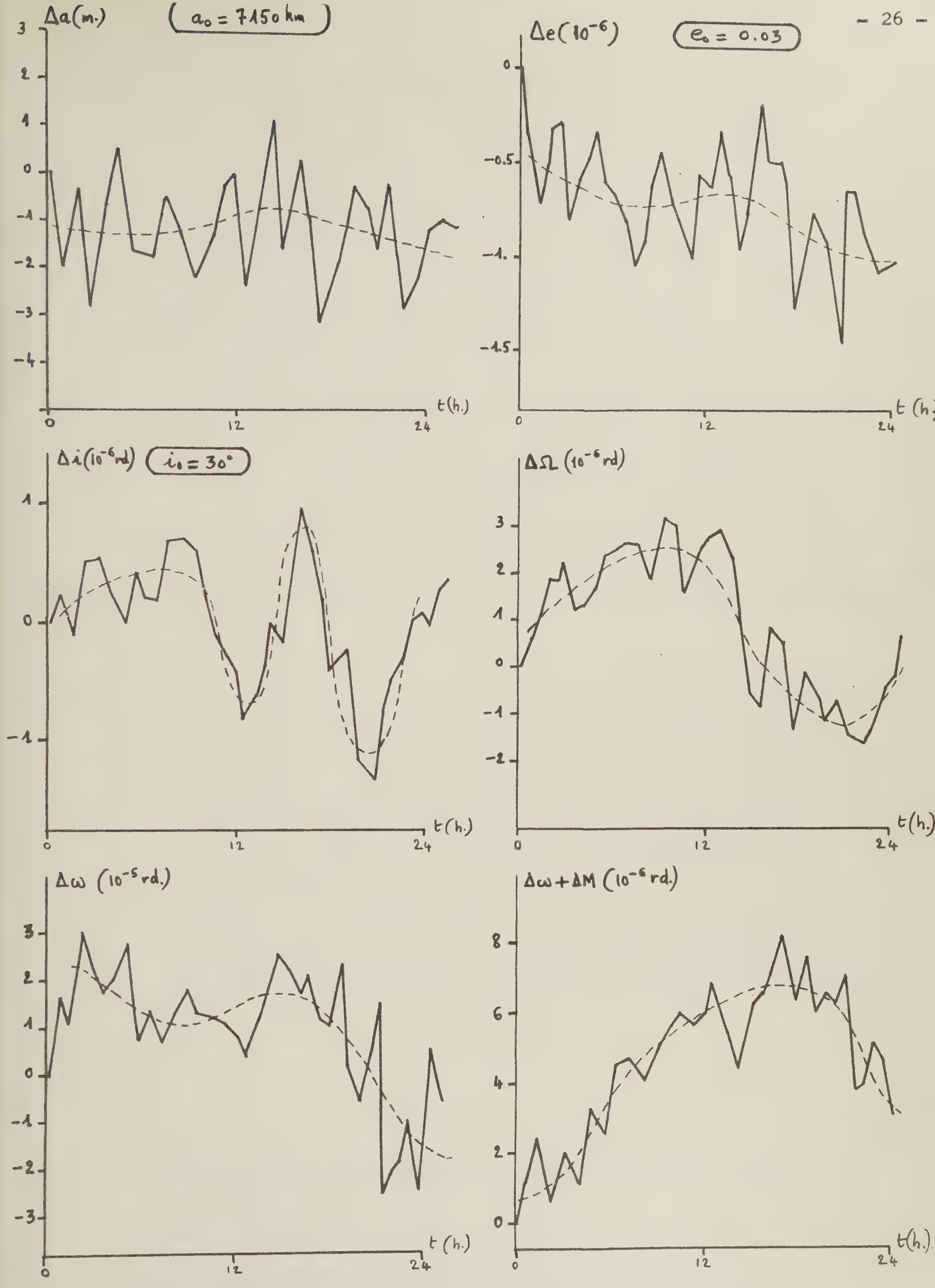


Fig. 5- Ecarts entre éléments orbitaux, Solution mixte $(U+\bar{\nabla}U+\Delta h+\Delta g)$ - S.E.69, Satellite fictif.

La comparaison des éphémérides obtenues dans les deux champ U_o et U_M pour un satellite arbitraire (d'orbite spécialement construite afin de ne pas présenter de résonance notable aux termes 12,13,14), est bonne également (fig. 5) ; on constate cependant un écart périodique (de 24 h) atteignant 50 m le long de la trace (et que l'on peut imputer aux harmoniques $\overline{H_{\ell 1}}$ quelque peu différents de ceux du modèle de référence). Il faut de plus remarquer que la constante de l'énergie ($\frac{1}{2}\dot{r}^2 - U$) est différente dans les deux cas et par conséquent il est impossible d'obtenir des trajectoires identiques. Par ailleurs, il est difficile de représenter correctement les harmoniques de résonance à l'aide de masses ponctuelles ; en effet il s'agit d'un simple phénomène mathématique étranger à toute réalité physique (du point de vue anomalies de densité) ; on peut donc envisager à ce niveau une représentation mixte du potentiel : harmoniques excentrés, plus termes complémentaires permettant de rendre compte des harmoniques de résonance.

Enfin nous avons utilisé ce modèle pour déterminer une orbite réelle du satellite Geos A par correction différentielle d'orbite basée sur l'intégration numérique [31] . Nous avons choisi un arc de 8 jours comportant 1 485 observations laser [30] effectuées durant la campagne ISAGEX [29] depuis 5 stations situées à Olifansfontein (Afrique du Sud), Natal (Brésil), Guam (Océan Pacifique), Arequipa (Pérou) et Greenbelt (Maryland, U.S.A.). Les inconnues du problème sont les 6 éléments osculateurs de la trajectoire à l'instant initial ; les coordonnées des stations et les paramètres physiques du modèle de force sont fixés.

Les résultats apparaissent dans les tableaux ci-après :

Orbite Initiale	
	t_0 = 23 04 1971 0^h 0^{mn} $9^s,23517$
	a_0 = 8073.83659 Km e_0 = 0.072371008 i_0 = 1.036468807 rd
	Ω_0 = 5.253330720 rd ω_0 = 0.254551394 rd. M_0 = 2.072630426 rd

Stations LASER					Nombre de Passages	Nombre d'obser-vations	σ par station (mètres)	
Nom	Code	Coordonnées (Km)					Avec S.E. II	Avec solution $\{U+\bar{\nabla}U+\Delta h+\Delta g\}$
		X	Y	Z				
Olifansfontein	7902	5056.134	2716.517	-2775.792	8	76	11.5	18.6
Natal	7929	5186.480	-3653.871	- 654.363	3	20	20.6	34.9
Guam	7060	-5068.963	3584.110	1458.757	3	789	6.0	13.1
Arequipa	7907	1942.788	-5804.088	-1796.939	4	35	15.1	20.8
Greenbelt	7050	1130.678	-4831.365	3994.105	4	565	6.9	12.4
				Total	22	1485	σ_{final} = 7.4 m	σ_{final} = 14.1 m

Détermination d'orbite

Comparaisons { Harmoniques sphériques (S.E. 1969) ; Masses ponctuelles (126 masses. Solution mixte) }

Orbite obtenue après convergence (4 itérations)	Harmoniques sphériques (S.E. 1969)	2σ (m, rd)	Masses ponctuelles (126 masses)	2σ (m, rd)
a'_0	8073.792	8.3	8073.804	15.
e'_0	0.07215988	7.10^{-8}	0.07216089	2.10^{-7}
i'_0	1.0364240	3.10^{-7}	1.0364236	6.10^{-6}
Ω'_0	5.2532803	3.10^{-7}	5.2532844	9.10^{-7}
ω'_0	0.244070	10^{-6}	0.244074	3.10^{-6}
M'_0	2.083133	10^{-6}	2.083128	3.10^{-6}

ISAGEX	Satellite : 658901 (Geos A)	Temps de calcul Unité centrale CDC 66	3533 secondes	1993 s.

Il y a donc un facteur deux en moyenne entre :

* les σ moyens des résidus pour chaque station
* les cohérences internes finales
* les σ sur les éléments orbitaux obtenus,

en faveur de la correction différentielle effectuée avec la S.E.II. Par contre, le temps de calcul est presque <u>réduit de moitié</u> en utilisant notre modèle à 126 masses.

Les graphes des résidus dans les deux cas sont également très instructifs (fig. 6).

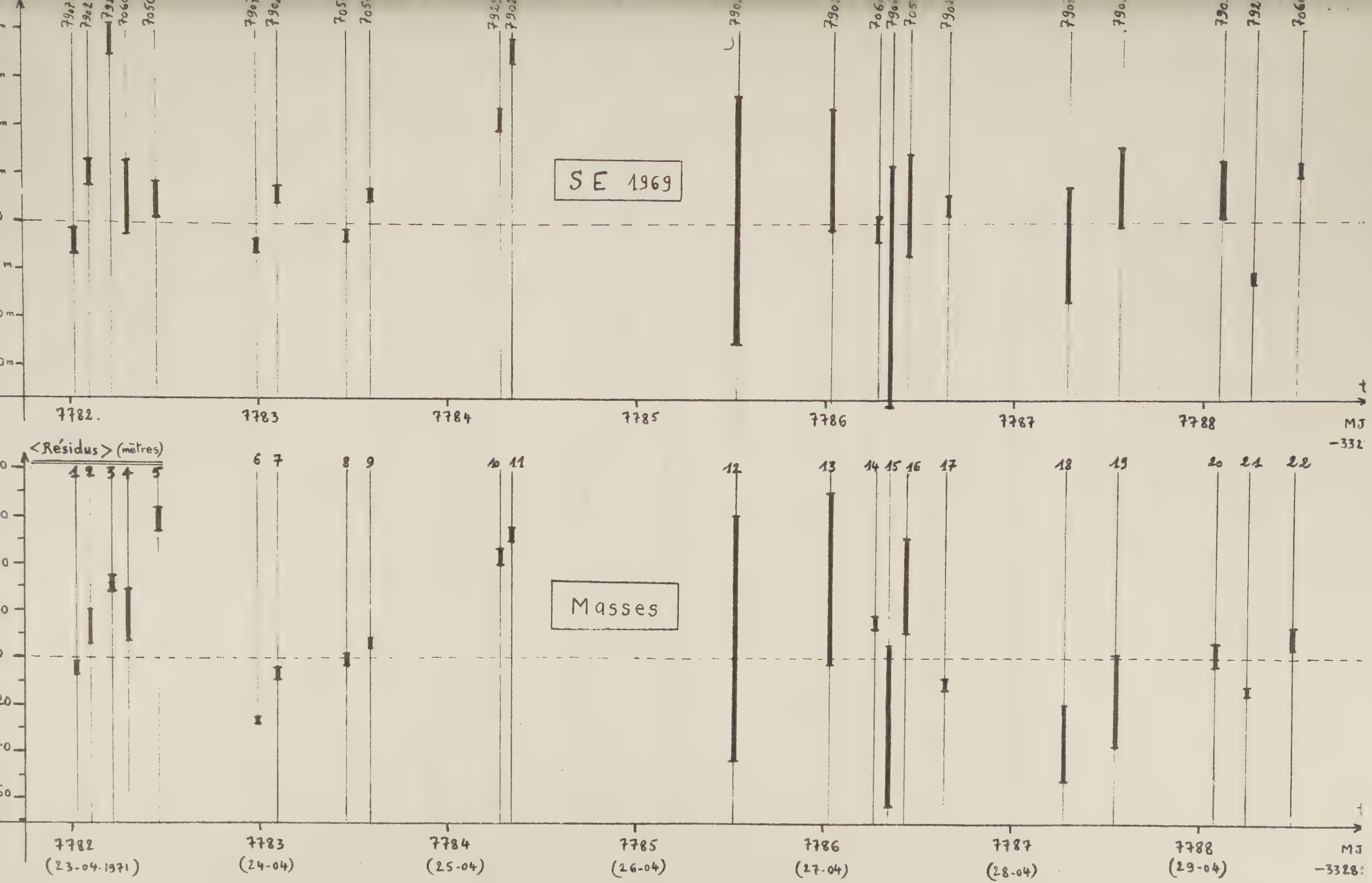


Fig. 6 - Comparaison des résidus par passage | Geos A

Les stations 7050 et 7060 ont les plus petits résidus mais il ne faut pas perdre de vue qu'elles ont beaucoup plus d'observations que les autres.
Finalement les orbites sont très voisines bien que la distribution des observations soit loin d'être idéale (les résidus sur les distances laser ne sont vraiment pas satisfaisants dans l'un ou l'autre cas).

1.3 - Représentation par fonctions harmoniques spéciales.

Nous ne nous étendrons pas outre mesure sur ce type de représentation, introduit récemment par Lundquist et Giacaglia [42] ; l'essentiel de notre étude a consisté à examiner et à démontrer de nombreuses propriétés de ces fonctions [26] , et à les utiliser à la représentation du géoide déterminé par altimétrie des océans.

1.3.1 - Le formalisme.

les fonctions

$$\left.\begin{cases} \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)\ \cos m\lambda & ,(m=0,1,\dots n) \\ \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)\ \sin m\lambda & ,(m=1,2,\dots n) \end{cases}\right\} 0 \leqslant n \leqslant N,$$

engendrent un espace vectoriel de dimension M = $(N+1)^2$, soit $\mathcal{E}$. Pour une configuration donnée de M points d'une sphère - et nous nous limiterons ici à la configuration :

$$\begin{cases} \varphi_k = \operatorname{Arc\,sin}\left[(-1)^k \cos\frac{k\pi}{2N+1}\right] , (k=0,1,\dots N) \\ \lambda_{kj} = j\ \dfrac{2\pi}{2k+1} \quad , (j=0,1,\dots 2k), \end{cases} \tag{11}$$

on recherche une autre base de M fonctions de $\mathcal{E}$: $\overline{W}_{kj}(\varphi,\lambda)$, telles que :

$$\overline{W}_{kj}\left(\varphi_r , \lambda_{rs}\right) = \delta_{kr}\ \delta_{js} \tag{12}$$

Ces fonctions valent donc 1 en un certain point de la configuration, et 0 aux autres points.

On démontre alors que :

$$\overline{W_{kj}}(\varphi,\lambda) = \sum_{m=0}^{k} \sum_{n=m}^{N} \left(\overline{A_{kj}^{nm}} \cos m\lambda + \overline{B_{kj}^{nm}} \sin m\lambda\right) \overline{P_{nm}}(\sin\varphi) \quad , \tag{13}$$

les coefficients $\overline{A_{kj}^{nm}}$, $\overline{B_{kj}^{nm}}$, qui sont au nombre de $(N+1)^4$, étant des constantes obtenues par inversion du système (12).

Ces fonctions généralisent les fonctions à une variable :

$$\begin{cases} Y_j^{[p]}(x) = \dfrac{1}{2p+1} \displaystyle\sum_{k=-p}^{+p} e^{ik(x-x_j)} \\ x_j = 2\pi j/(2p+1) \end{cases} \tag{14}$$

qui possèdent une propriété analogue à (12) : $Y_j^{[p]}(x_k) = \delta_{jk}$, et qui décroissent en moyenne très rapidement au voisinage du point x_j, d'autant plus que p est grand (fig. 7).

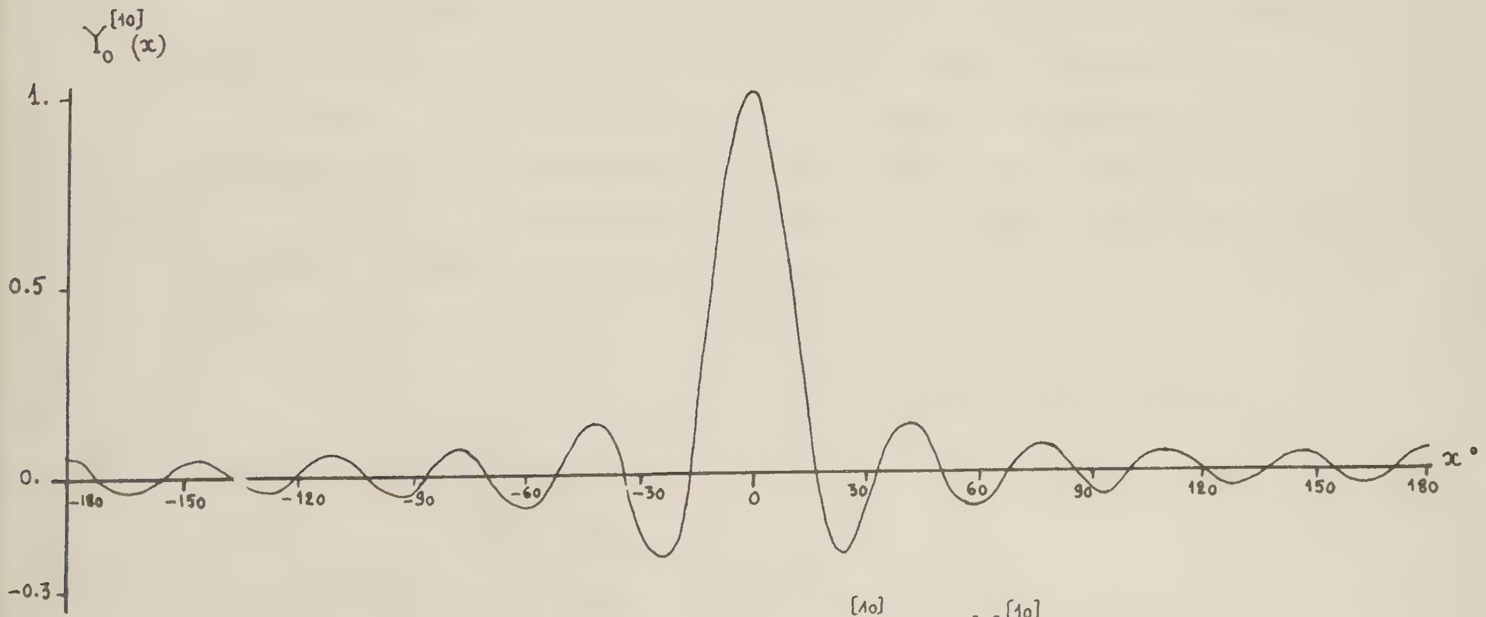


fig. 7 Exemple de fonction $Y_j^{[10]}(x) = Y_0^{[10]}(x-x_j)$.

Les fonctions $\overline{W_{kj}}$ satisfont donc pleinement les conditions (C1) et (C3) énoncées au § 1.1. ... sous réserves d'obtention des $\overline{A_{kj}^{nm}}$, $\overline{B_{kj}^{nm}}$! Nombre de propriétés de ces coefficients ont été démontrées [1] , [26] ; par ailleurs, il semble que Giacaglia aurait trouvé une expression analytique . Une telle formulation évite donc l'inversion du système [12], mais son utilisation n'est pas, peut-être, un avantage du point de vue temps de calcul, du fait du nombre d'opérations nécessaire (au moins $(N + 1)^4$...)

1.3.2. Principaux résultats.

Nous avons calculé les fonctions $\overline{W_{kj}}(\varphi, \lambda)$ successivement pour N = 4, 9, 16, 22, par inversion de la matrice du système (12).

Nous avons préféré utiliser les fonctions normalisées $\overline{P_{nm}}(u)$ et $\overline{W_{kj}}$ à cause de la propagation moindre des erreurs d'arrondis dans les formules de récurrence permettant le calcul des fonctions de Legendre (cf. [26] , Annexe C) ; l'inversion de la matrice (de rang 25, 100, 289, 529, respectivement - pour les N précités) a été effectuée par la méthode de décomposition en blocs et de Gauss-Jordan à "pivot complet" [15] .

Les coefficients de la décomposition (formule 13) sont disponibles sur bande magnétique ; un exemple a été donné en annexe H de [26] . Nous avons l'intention de calculer ces coefficients pour le degré 36 qui a été adopté pour la représentation de nombreuses fonctions utilisées en géophysique (hauteur du géoide, anomalies de gravité, fonction océan, topographie terrestre, etc...) et pour lesquelles une résolution de 5° est optimale.

La hauteur du géoide, par exemple, peut s'écrire en tout point :

$$\Delta h(\varphi,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{2k} \Delta h(\varphi_k, \lambda_{kj}) \, \overline{W_{kj}}(\varphi,\lambda) \qquad (15)$$

(en approximation sphérique [2])

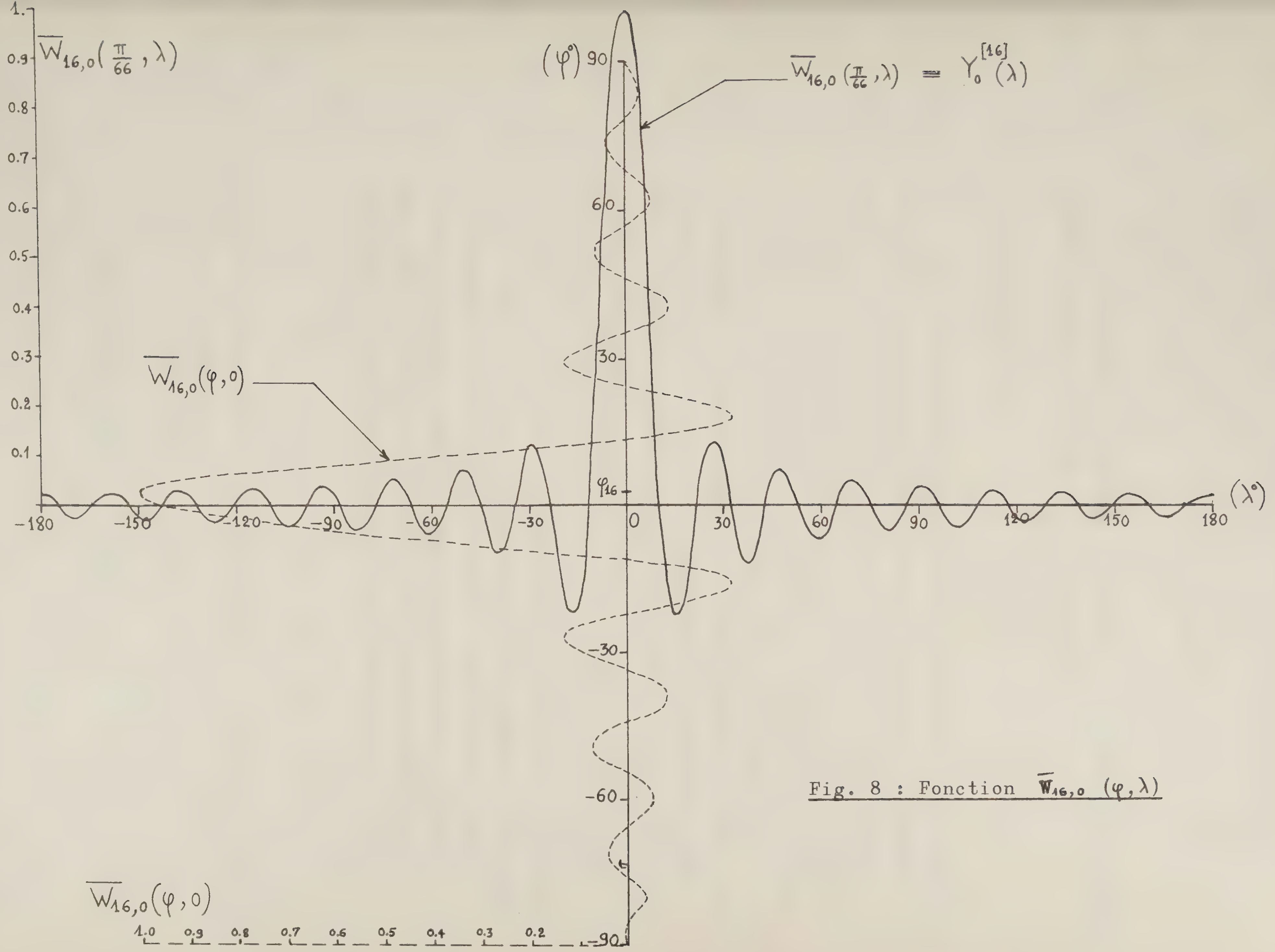


Fig. 8 : Fonction $\overline{W}_{16,0}(\varphi,\lambda)$

L'avantage de cette formule est qu'il suffit de garder les fonctions et coefficients correspondants aux points de la configuration situés à proximité de (φ, λ), en raison de la décroissance très rapide des fonctions $\overline{W}_{kj}(\varphi, \lambda)$.

La figure 8 montre clairement les propriétés régionalisées de ces fonctions $\overline{W}_{kj}$ (ici $\overline{W}_{16,0}$).

1.4. Conclusion.

La représentation par masses ponctuelles est la seule qui vérifie nos trois conditions, en supposant cependant, pour (C3), que le potentiel de référence est suffisamment fin pour que les paramètres ε_k soient petits (cf. figure 1). Son principal avantage est sa grande simplicité et, peut - être dans l'avenir, une interprétation géophysique possible des valeurs trouvées (nous n'avons jusqu'à présent que pû remarquer la concordance - et c'est heureux - entre les valeurs relatives ε_k et l'importance des anomalies Δg, mais l'indétermination sur la profondeur est un obstacle à une compréhension effective de la source de l'anomalie). Le potentiel de référence (assimilé à U_0) comportant par exemple tous les harmoniques de la SE II, il est certain que les paramètres ε_k seront inférieurs à 10^{-8} environ ; cela s'avère donc être une technique avantageuse d'extension d'une représentation par harmoniques sphériques, ceux-ci étant conservés jusqu'à un certain degré pour le calcul des trajectoires de satellites, les masses complétant la représentation fine du géoide au niveau du sol. Ecrivant U sous la forme :

$$U = U_0 + T_M = E + T_0 + T_M$$

où E est le potentiel d'un ellipsoide de référence, $T_0 + T_M$ la partie complémentaire, nous aurons donc la hauteur du géoide, Δh , au dessus de cet ellipsoide :

$$\Delta h \simeq a_e^2 \left\{ \frac{T_0}{GM} + \sum_k{}' \frac{\varepsilon_k}{r_k} \right\} \qquad (16)$$

Le signe $\sum'$ signifie que l'on ne prend que les masses situées dans un voisinage (à déterminer) du point considéré.

La représentation par fonctions harmoniques spéciales $\overline{W_{kj}}$, semble plus satisfaisante pour l'esprit que celle par masses ponctuelles, d'un point de vue mathématique, puisqu'étant rigoureusement équivalente à la représentation en harmoniques sphériques habituelles. En un point (φ,λ), ayant déterminé les indices (k,j) et (h,i) tels que :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_h & \leqslant & \varphi & \leqslant & \varphi_k \\ \lambda_{hi} & \leqslant & \lambda & \leqslant & \lambda_{h,i+1} \\ \lambda_{kj} & \leqslant & \lambda & \leqslant & \lambda_{k,j+1} \end{array} ,$$

on écrira simplement :

$$\begin{aligned} \Delta h(\varphi,\lambda) \simeq\ & \Delta h(\varphi_h;\lambda_{hi})\,\overline{W_{hi}}(\varphi,\lambda) + \Delta h(\varphi_h;\lambda_{h,i+1})\,\overline{W_{h,i+1}}(\varphi,\lambda) \\ & + \Delta h(\varphi_k;\lambda_{kj})\,\overline{W_{kj}}(\varphi,\lambda) + \Delta h(\varphi_k;\lambda_{k,j+1})\,\overline{W_{k,j+1}}(\varphi,\lambda) \end{aligned} \qquad (17)$$

C'est la meilleure formule d'interpolation possible.

Cependant, elle ne se prête absolument pas à une extension facile, dans la mesure où, pour représenter des détails supplémentaires dans une région donnée, il est nécessaire d'ajouter des points-en nombre P - à la configuration $\{\varphi_k , \lambda_{kj}\}$, et indispensable de résoudre à nouveau le système (12) par inversion d'une énorme matrice (il n'y a pas d'autres voies ici, la configuration devenant tout à fait irrégulière). Néanmoins on peut, en utilisant une technique d'inversion par décomposition en blocs, bénéficier de l'inversion du système initial. Il ne reste plus alors qu'à inverser un système linéaire de rang P, [15] .

2 - ETUDE DE CERTAINS SYSTEMES

Nous avons fait l'étude de ce que pouvait apporter un satellite bas (à trainée compensée) à la détermination des paramètres ε_k de notre représentation par masses ponctuelles, en fonction de la valeur de ces paramètres et de la distance relative : masse perturbatrice - satellite. Nous avons élargi notre point de vue en envisageant le problème de deux satellites sur orbite basse mesurant leurs variations de vitesse radiale. Enfin nous avons abordé le problème de la détermination du géoide et du potentiel terrestre par altimétrie ; ce domaine - d'actualité, vu le lancement en Juin 1974 du satellite américain Geos C, muni d'un altimètre - a été envisagé sous différents aspects : orbitographie, étude des erreurs du système, traitement statistique de ces mesures d'un type nouveau (vu leur résolution et leur précision), applications scientifiques.

2.1 - Satellite très bas à trainée compensée

Nous avons simulé des mesures de distance laser, et de décalages de fréquence (effet Doppler) effectuées depuis une station observant un satellite durant le survol d'une masse ponctuelle. En effet, les études des perturbations instantanées sur des périodes courtes sont à notre avis les plus intéressantes (exemple de la détermination des mascons lunaires par Muller et Sjogren [44]), les perturbations à longue période étant difficiles à analyser du fait de la petitesse supposée de la masse et de l'effet important des autres termes du potentiel de référence E.

Ecrivant le potentiel vrai sous la forme :

$$U = E + GM \frac{\varepsilon}{r} \qquad (18)$$

nous avons intégré le mouvement du satellite dans le champ E et dans le champ U, avec un pas de 10 à 15 mn, réduit à

10 secondes lors du survol de la masse (tant que la distance géocentrique ψ reste inférieure à 10°), et simulé les mesures pour les deux éphémérides obtenues [16].

De nombreux tests ont été effectués ; nous avons constaté que les résidus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta d = (\text{distance station-satellite})^U - (\text{distance station satellite})^E \\ \Delta \nu_R = \text{différence des décalages de fréquence relatifs (Ephéméride calculée avec U - éphéméride calculée avec E)} \\ \quad = \mathcal{D}_U - \mathcal{D}_E , \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \mathcal{D} = \frac{\text{fréquence reçue - fréquence émise}}{\text{fréquence émise}} ,$$

étaient très sensiblement proportionnels à ε , du moins au niveau d'une révolution ou plus du satellite.

Pour une station d'observation située à la verticale du mascon ε , nous avons obtenu les "crochets" caractéristiques (cf. [44]) représentés sur la figure 9, pour une orbite d'excentricité 0.01, périgée : 250 Km, inclinée à 45°, et une masse à 300 Km de profondeur.

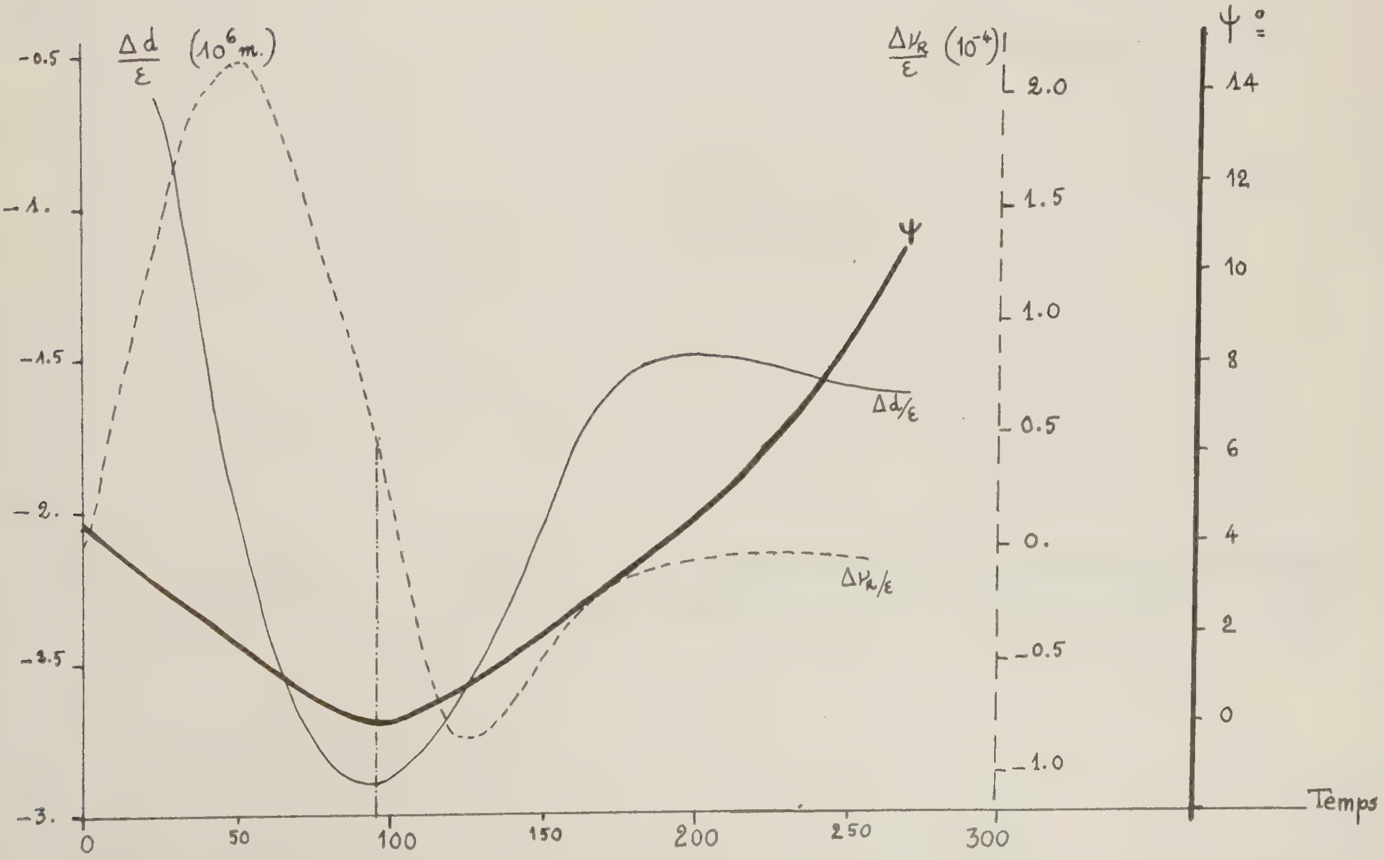


fig. 9 : Effet instantané d'une masse ε sur un satellite proche

Un mascon de valeur relative 10^{-7} crée donc une perturbation instantanée, sur une telle orbite, de :

* 30 cm au plus sur la distance station - satellite, ce qui peut laisser espérer sa détermination avec les moyens laser qui seront développés dans un futur proche.

* 0.06 à - 0.02 cycles sur le décalage Doppler, pour une fréquence de 4.10 Hz et un temps de comptage de 10 secondes, ce qui est très marginal .

Si la station n'est plus à la verticale du mascon, la position de celui-ci est plus délicate à déterminer. Nous avons effectué une autre série de tests dans lesquels nous disposions de deux stations d'observation (à la fois Laser et Doppler) aux points A et B de la figure 10 ci-après, et pour une orbite inclinée à 2°, de périgée à 255 Km d'altitude, la masse étant cette fois placée tout près de la surface, à 100 Km de profondeur (au point M)

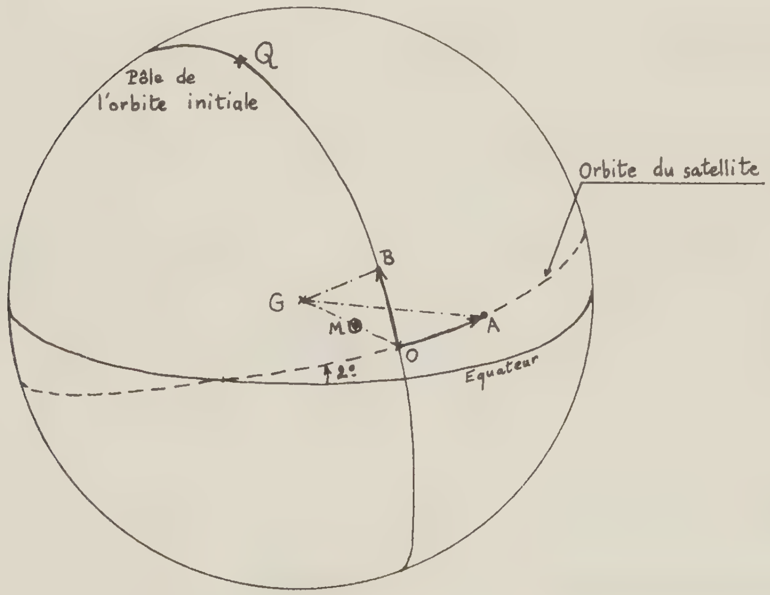


fig. 10 - Observation du satellite S survolant le mascon (M , ε), depuis deux stations A, B. (GM , GA) = (GM , GB) = 5° .

Sur la figure 11 nous avons représenté les deux courbes $\Delta\nu_R/\varepsilon$ pour les stations A et B, ainsi que les distances zénitales z^A et z^B du satellite en ces points et la distance géocentrique ψ = (GO, GS).

On constate alors :

- que pour la station B qui enregistre tout le passage du satellite au-dessus du mascon M d'une manière symétrique (géométriquement parlant), la courbe des résidus Doppler relatifs présente un crochet accusé, tout comme lorsque la station est en O.
- que pour la station A, pour laquelle le satellite ne passe au zénith que quelque temps après (85 s. exactement) avoir survolé le mascon M, seul le minimum est accusé.

L'analyse des deux courbes doit néanmoins permettre la localisation de M, ... si la fréquence émise est assez élevée.

Qu'il s'agisse de mesures Doppler ou Laser, il ne faut pas perdre de vue qu'une telle interprétation des courbes de résidus sur un passage ne peut se faire qu'après élimination quasi-idéale de toutes les perturbations connues ou mal modélisables. D'où la nécessité d'un système de compensation des forces de surface (pression de radiation solaire directe et rediffusée par la terre, frottement atmosphérique surtout), et d'un potentiel de référence E assez fin.

Si le satellite n'est muni que d'un microaccéléromètre, le fait qu'il soit bas rend très difficile les prévisions précises en une station et un système Doppler est préférable pour l'analyse des perturbations par passage, à condition toutefois de disposer d'une fréquence de quelques GHz.

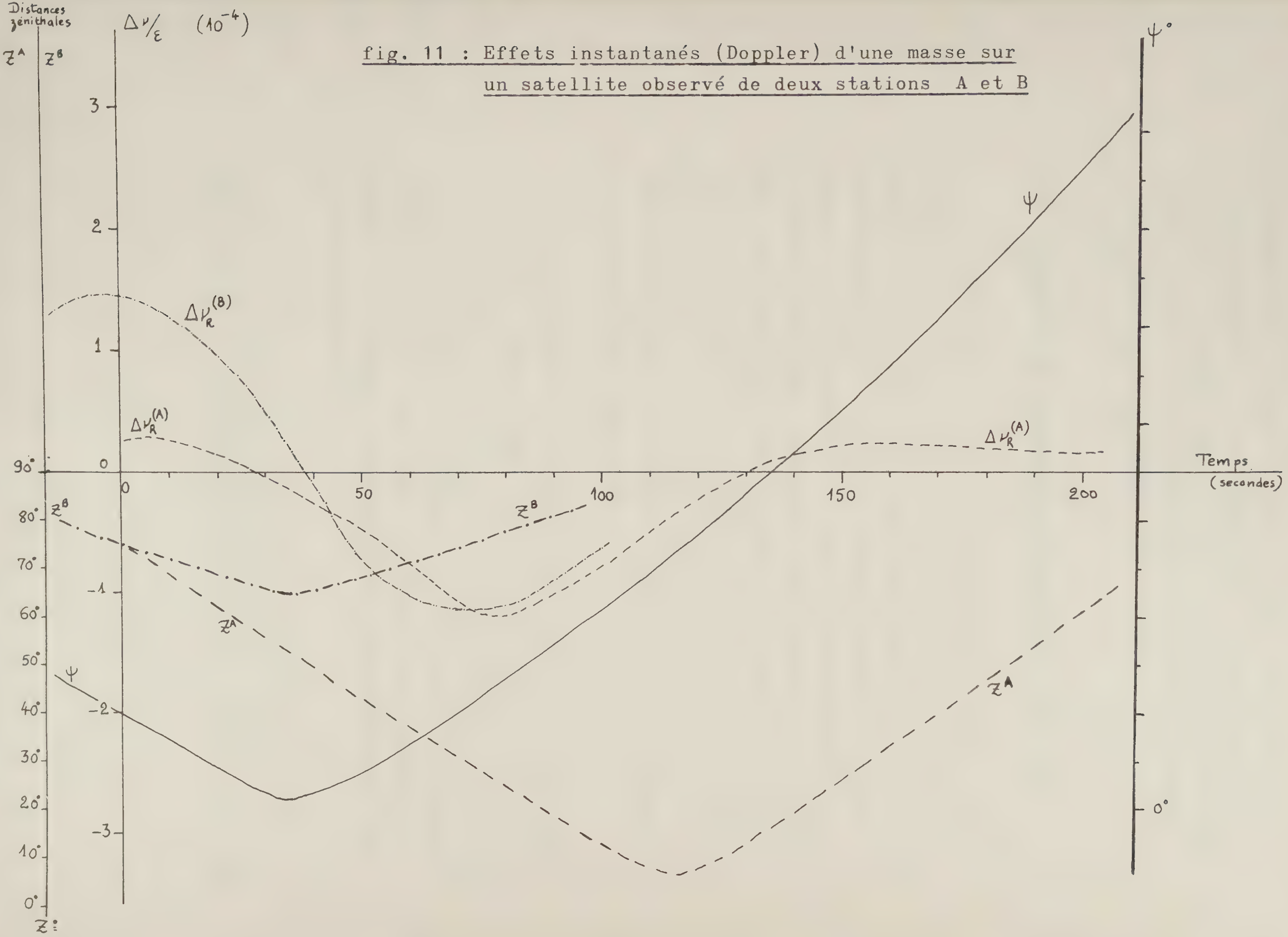


fig. 11 : Effets instantanés (Doppler) d'une masse sur un satellite observé de deux stations A et B

Ce sont ces différentes difficultés (nécessité d'un potentiel E évolué, donc petitesse des effets ; microaccéléromètre et non "drag-free" ; réflecteurs laser et non système Doppler) qui nous ont fait abandonner la mise en oeuvre de la détermination directe des masses à l'aide du satellite aéronomique français D 5 B qui sera lancé en Mars 1973.

2.2 - Poursuite de satellite par satellite [21] , [22] :

La poursuite de satellite par satellite qui utilise les mesures Doppler, permet une détermination très fine du potentiel puisque les variations de vitesse dues aux anomalies de celui-ci sont plus importantes que les perturbations sur la position. Cette technique est avantageuse car les observations radio ne nécessitent pas d'appareillage compliqué ni une stabilisation et un pointage rigoureux nécessaires lorsque l'on emploie le laser et des moyens optiques. De plus, elle permet de s'affranchir du problème de la couverture de l'orbite qui nécessite habituellement de très nombreuses stations au sol. Il suffit de choisir convenablement les positions initiales et respectives des satellites.

Il est possible de mettre deux satellites identiques sur une même orbite, à quelques dizaines ou centaines de kilomètres l'un de l'autre. La sensibilité d'un tel couple de satellites (dit "jumeaux") est alors maximale pour les anomalies du potentiel de dimensions voisines de la distance qui les sépare. On obtient ainsi une représentation directe, à l'altitude des satellites, des variations fines du champ de gravité.

Nous allons donner les principaux résultats d'une étude paramétrique que nous avons effectuée au G.R.G.S. dans le cadre de la proposition de mission Diabolo [17] , [18] .

Sans altérer les résultats d'une telle étude, on peut, pour simplifier, considérer les deux satellites sur la même orbite circulaire à une altitude H (fig.12) survolant une anomalie du potentiel terrestre, représentée ici par une anomalie de densité à symétrie sphérique, c'est-à-dire un"mascon" ε ; cet intermédiaire est bien commode pour l'obtention des résultats, mais peut être éliminé finalement de ceux-ci, la résolution étant exprimée (pour une précision x de la mesure de vitesse radiale) en anomalie de gravité supérieure à m milligal sur une calotte sphérique de rayon ρ (Km).

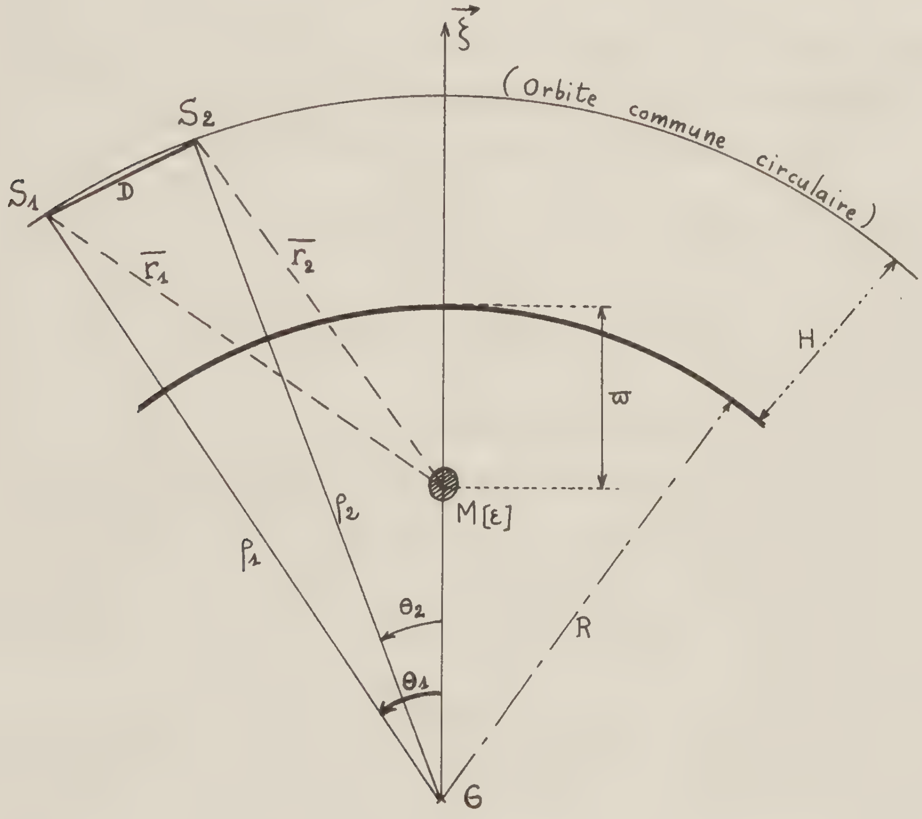


Fig. 12 - Les satellites jumeaux -

Les notations étant celles de la figure ci-dessus, on obtient les courbes donnant la résolution minimum en fonction de l'amplitude de l'ondulation pour différents paramètres $x/_D$ et H en éliminant ε et ϖ des relations ci-après :

(19) $\varepsilon = 5.14 \; 10^{-5} \frac{x}{D} (H+\varpi)^2 \left(\frac{R+H}{R-\varpi}\right)^{1/2}$ qui donne la valeur minimale

ε (unité = masse de la terre) d'un mascon détectable situé à ϖ (Km) de profondeur, lorsque les deux satellites séparent une distance D (Km) et effectuent une mesure de leur vitesse radiale l'un par rapport à l'autre avec une précision x (mm/s), (R et H sont aussi en Km) ;

(20) $$\frac{\varepsilon}{m} = 10^{-6} \frac{\left\{1 - 2\cos\frac{\rho}{2R}\left(1-\frac{\varpi}{R}\right) + \left(1-\frac{\varpi}{R}\right)^2\right\}^{3/2}}{1 - \left(1-\frac{\varpi}{R}\right)\cos\frac{\rho}{2R}}$$ qui définit

la région ($\psi \leqslant \frac{\rho}{R}$) de la surface terrestre autour de $\vec{G\xi}$ où l'anomalie de gravité Δg correspondant à $[\varepsilon, \varpi]$ est supérieure ou égale à m milligal;

(21) $\varepsilon = 2.52 \, . \, 10^{-14} \varpi^2 \Delta g_{max.}$ qui donne la valeur maximale

de Δg correspondant au mascon $[\varepsilon, \varpi]$.

Page suivante , nous donnons ces courbes pour une altitude de 300 Km qui apparaît comme le minimum raisonnable pour avoir une durée de vie suffisante (pour des altitudes supérieures - 400/500 Km - nous avons en outre remarqué que la résolution décroissait très vite), fig.13 -

Pour cette altitude, on voit donc que la résolution de 200 Km sera obtenue quelque soit $\Delta g_{max.}$, pour :

$$2.10^{-10} \leqslant \frac{x}{D} \leqslant 3.10^{-10} ,$$

soit le compromis suivant entre la précision x et la distance de séparation D :

H = 300 Km

x (mm/s)	D (Km)
0.01	50
0.02	100
0.03	150
0.05	250
0.10	500

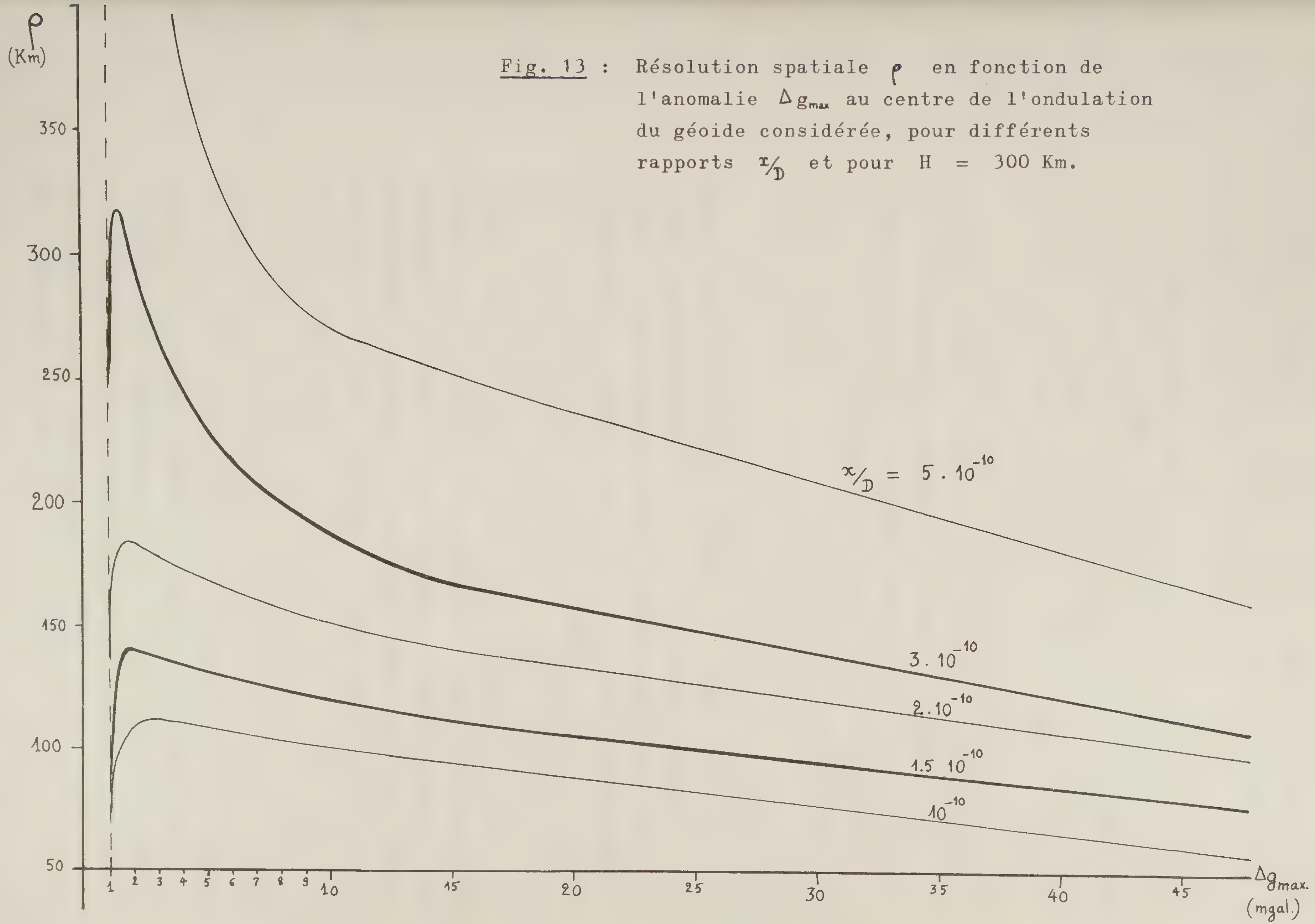


Fig. 13 : Résolution spatiale ρ en fonction de l'anomalie Δg_{max} au centre de l'ondulation du géoide considérée, pour différents rapports x/D et pour $H = 300$ Km.

Il faut cependant remarquer que la résolution obtenue est surtout sensible au paramètre $\frac{x}{D}$ pour des ondulations de faible amplitude ($\Delta g < 10$ mgal).

En d'autres termes, s'il n'est pas possible d'avoir une valeur x/D inférieure à 3.10^{-10} , la résolution sera meilleure que 200 Km pour toute ondulation d'amplitude supérieure à 8 mgal, et ne sera plus que de 300 Km (ou moins) pour des amplitudes plus faibles (1 à 2 mgal)

La précision actuelle des mesures de vitesses radiales est de l'ordre de 0.3 à 1.0 mm/s . Les progrès de la technologie permettent cependant d'espérer une résolution de 0.03 à 0.05 mm/s dans les dix années à venir. Si le bilan de liaison reste favorable à des distances inter-satellites de 150 - 200 Km, les objectifs poursuivis pourront être atteints par cette technique.

Les orbites de ces satellites peuvent être déterminées avec une précision suffisante, après un petit nombre de révolutions, à l'aide de quelques stations laser au sol (les mesures de vitesse radiale pourront complémenter la poursuite classique dans ces déterminations d'orbites). Avec une orbite polaire, on peut obtenir une couverture totale de la Terre en quelques jours, mais l'expérience devra durer plusieurs mois si l'on veut réussir une détermination statistique plus précise des anomalies de potentiel et englober des détails de dimensions variées, les satellites se séparant au cours du temps ; mais cette durée de mission - tout autant peut-être que l'utilisation scientifique des données (connaissance des forces gravitationnelles seules) - nécessite sans doute que les deux satellites soient munis d'un dispositif "drag-free". Enfin des études océanographiques pourront être entreprises grâce à l'utilisation conjointe de l'altimètre. En effet, le géoide et la surface moyenne des océans peuvent parfois différer de quelques mètres du fait des courants, des variations de températures, de salinité, etc ... La comparaison des données altimétriques avec le géoide déterminé par la technique de poursuite de satellite par satellite doit permettre de mesurer ces phénomènes.

2.3 - Altimétrie

L'avènement des techniques altimétriques doit permettre une reconstitution fidèle et fine du géoide dans ses parties océaniques ; de plus ce nouveau type d'observation quasi continues est un apport certain pour la restitution des orbites de satellites (détermination automatique des trajectoires, à la limite). Enfin, mélangées au données gravimétriques, les mesures altimétriques définissent partout le potentiel à la surface de la terre, donc à l'extérieur [26] .

2.3.1 - Principe :

La mesure est théoriquement très simple : à un instant donné, on détermine par radar la distance du satellite au-dessus du niveau moyen de l'océan, (assimilé au géoide).

En fait la surface de l'océan diffère du géoide à cause des phénomènes suivants :

- marées océaniques
- vagues (différentes longeurs de houle)
- différences de salinité
- vents et pressions atmosphériques
- courants marins .

Théoriquement, un ensemble de mesures altimétriques contient les informations relatives aux phénomènes précités et doit permettre de déterminer certains paramètres qui les gouvernent. En pratique, ce n'est qu'après plusieurs "générations" d'altimètres de précision croissante que l'on atteindra successivement le géoide, les courants marins, les vagues, etc ...

2.3.2 - Contraintes

L'orbite du satellite doit être aussi inclinée que possible afin de couvrir au mieux la surface de la terre.

L'inclinaison minimum souhaitée est de 60°.

L'altitude est conditionnée : par le frottement atmosphérique - il faut s'en affranchir au mieux par la restitution d'orbite (ou adjoindre un système de compensation de traînée) - par le bilan de liaison de l'instrument et l'énergie disponible ; 800 Km en moyenne serait souhaitable mais des études ont montré que l'on peut descendre (sans système drag-free) à 550 - 600 Km. L'excentricité ne doit pas être importante à cause de la stabilisation et surtout afin de limiter l'ambiguité sur la valeur numérique de la mesure (important du point de vue mémoire de bord). Une stabilisation rigoureuse du satellite doit être réalisée : parfaite dans le cas d'un altimètre laser (ce qui fait pour l'instant abandonner ce type d'altimètre), compatible avec l'ouverture du faisceau d'antenne et la précision de l'instrument dans le cas d'un altimètre radar.

Enfin, le satellite n'étant pas constamment en vue de stations de télémesure, une mémoire doit être implantée à bord du satellite, de taille compatible avec la cadence de mesure, la période de révolution, le nombre et l'implantation(relativement à l'orbite) des stations de télémesure. La cadence des mesures dépend elle-même de la résolution spatiale souhaitée au niveau du géoide (1 mesure toutes les 15 secondes correspond en moyenne à une définition de 100 Km ... c'est-à-dire à un développement en harmoniques sphériques du potentiel terrestre jusqu'au degré 200).

2.3.3 - Systèmes envisagés (altimètres radar)

La difficulté majeure réside en le fait qu'une mesure de distance ne peut jamais être instantanée (géométriquement), et en l'interprétation d'une telle mesure ; ce dernier point est dû essentiellement au fait que la terre n'est pas sphérique et l'orbite non circulaire (d'où une variation non linéaire de la distance satellite-ellipsoïde de référence), que le géoide diffère de

l'ellipsoïde terrestre, que les vagues dépendent du temps et sont un phénomène mal connu dans le détail.

D'après la littérature, il apparaît qu'il existe deux types principaux de vagues :
les houles longues et moyennes de demi-longueur d'onde supérieure ou égale à 200 m, et d'amplitude inférieure à 2m dans 95 % des cas (en temps et en surface océanique) ;
les vagues courtes d'amplitude inférieure ou égale à 30 cm, de longueur d'onde égale à quelques mètres au plus.
Les systèmes de mesures proposés actuellement, étudiés aux U.S.A. [35] pour la mission altimétrique prévue sur le satellite GEOS C (lancement en Juin 1974), et en France dans le cadre de la proposition d'expérience "DORADE" envisagée au C.N.E.S. [19], s'affranchissent de ces variations par une technique de mesure à grande cadence de répétition qui permet d'obtenir en quelque sorte, à travers la moyenne d'un grand nombre de distances mesurées, une surface lissée de l'océan pendant un intervalle de temps déterminé.

Dans un repère lié à la terre et par rapport à une surface de référence donnée (fixée), le niveau de la mer en un point géographique supposé connu est une fonction du temps. Si la surface de référence est l'ellipsoïde terrestre, nous désignerons cette quantité par R (t). Nous appellerons alors niveau moyen de la mer en ce point (φ, λ), - et nous le confondrons avec la hauteur du géoide, - la quantité :

$$\Delta h(\varphi,\lambda) = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} R(t)\, dt \qquad (22)$$

où $\mathcal{T}$ est la durée de la mesure - nous supposons implicitement que l'on a soustrait l'effet des marées océaniques pour lesquelles $\mathcal{T}$ devrait être démesurément grand si l'on voulait que l'intégrale représente le géoide -.

La durée de la mesure doit être telle que l'orbite et la trace de celle-ci sur l'ellipsoïde puissent être considérées rectilignes, et telle que l'amplitude des irrégularités géodésiques soit inférieure à la précision de la mesure.

En première approximation, et si l'on s'intéresse seulement aux variations d'altitude dues à l'excentricité de l'orbite (δh_e) et à l' aplatissement terrestre (δh_α), on a :

$$\delta h_\alpha = - a_e \, \alpha \, \sin 2\varphi \, \frac{d\varphi}{dt} \tag{23}$$

$$\delta h_e = - \frac{q - p}{2} (1 - e^2) \frac{\sin v}{(1 + e \cos v)^2} \frac{dv}{dt} \tag{24}$$

avec : a_e = rayon équatorial de l'ellipsoïde terrestre,
α = aplatissement de celui-ci
φ = latitude du satellite
e = excentricité de l'orbite
q = apogée de l'orbite
p = périgée de l'orbite
v = anomalie vraie .

Pour des orbites comprises entre 500 et 1000 Km, $\mathcal{C}$ = 1 seconde est suffisamment petit pour que δh_α et δh_e soient supposés linéaires pendant cet intervalle de temps.

Le niveau moyen des mers ainsi défini suppose implicitement que la mesure d'altitude est effectuée sur une tache au sol de diamètre quasi nul.

En fait, les systèmes proposés effectuent la mesure altimétrique sur une tache de plusieurs Kilomètres au niveau de la surface terrestre ; ils réalisent donc une moyenne spatiale, à un instant donné, sur l'étendue de cette tache, (fig.14).

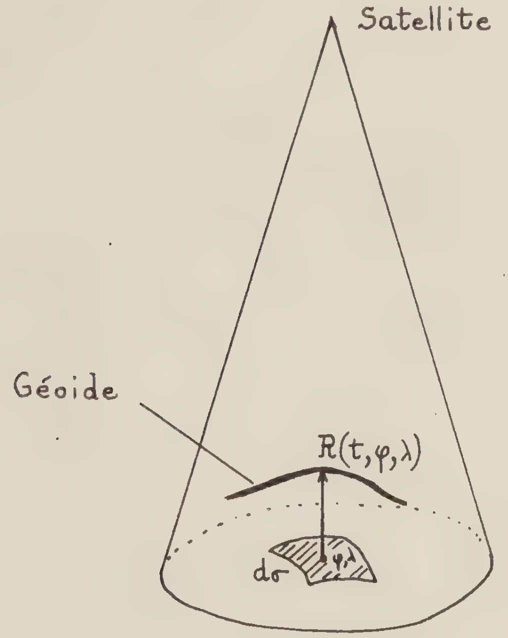


fig. 14 : Etendue de la tache.

L'étendue A de la tache doit être telle que les irrégularités géodésiques soient inférieures à la précision de la mesure. Les investigateurs ont ainsi été conduits à une tache de 10 Km de diamètre.

La mesure H est alors définie comme suit :

- Une impulsion du radar effectue la moyenne spatiale sur une tache de 10 Km,
- La moyenne sur n impulsions pendant une seconde est la moyenne temporelle et représente le niveau moyen de la mer.

$$H(\phi, \Lambda, t_0) = \frac{1}{t_B - t_A} \int_{\mathcal{C}} H(t, \varphi, \lambda) \qquad (25)$$

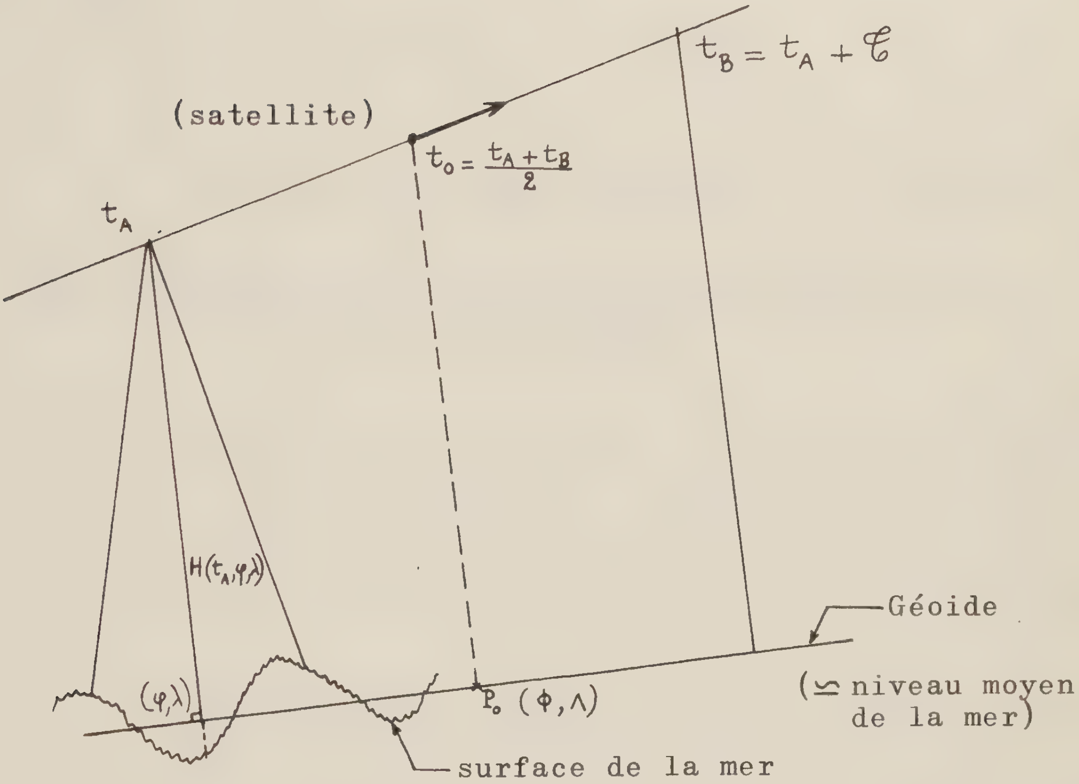


Fig. 15 : Mesure altimétrique: H.

Pratiquement, un radar à procédé de compression d'impulsions est bien préférable du point de vue bilan énergétique. Des études théoriques montrent que l'on a effectivement intérêt à effectuer une moyenne sur 3000 à 5000 impulsions. En effet, considérons une impulsion rectangulaire de durée τ émise par le radar en direction de la surface de la mer ; on démontre que le signal de retour a l'aspect donné sur la figure 16 lorsque la réflexion a lieu sur une surface parfaitement sphérique.

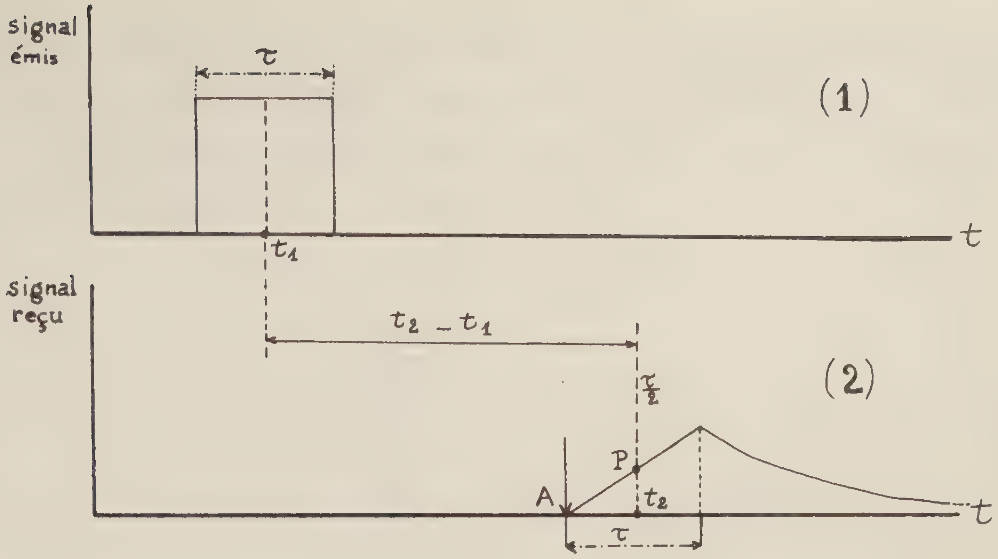


fig. 16 : Emission et réception d'une impulsion après réflexion sur une sphère.

L'agitation de la surface de la mer par les vagues produit des déformations de la courbe de réponse (2) de la figure ci-dessus. On montre cependant que l'on tend vers cette courbe lorsque l'on moyenne plusieurs milliers d'impulsions.

Un dispositif de poursuite à double porte permet alors l'asservissement sur le point P milieu de la rampe de montée du signal retour, point qui reste invariant en temps en fonction du dépointage du faisceau d'antenne radar [35] ; on en déduit alors le point A sous-satellite à $t_2 - \frac{\tau}{2}$.

2.3.4 - Missions envisagées (premiers altimètres)

* Elles sont essentiellement géodésiques dans le cadre du satellite GEOS C ou de la proposition d'expérience DORADE.

Le satellite étant suivi depuis des stations au sol (laser - essentiel pour la calibration -, et doppler - important pour la couverture -) on peut, par correction différentielle d'orbite utilisant ces mesures (ainsi, éventuellement, que les mesures altimétriques), restituer les variations d'altitude du satellite au-dessus de l'ellipsoïde de référence (on s'autorise des écarts systématiques

constants ou linéaires par morceaux) avec une précision au moins égale à celle de l'altimètre. Les mesures altimétriques jointes à cette altitude permettent donc d'avoir la hauteur du géoide au-dessus de l'ellipsoïde. (fig.17)

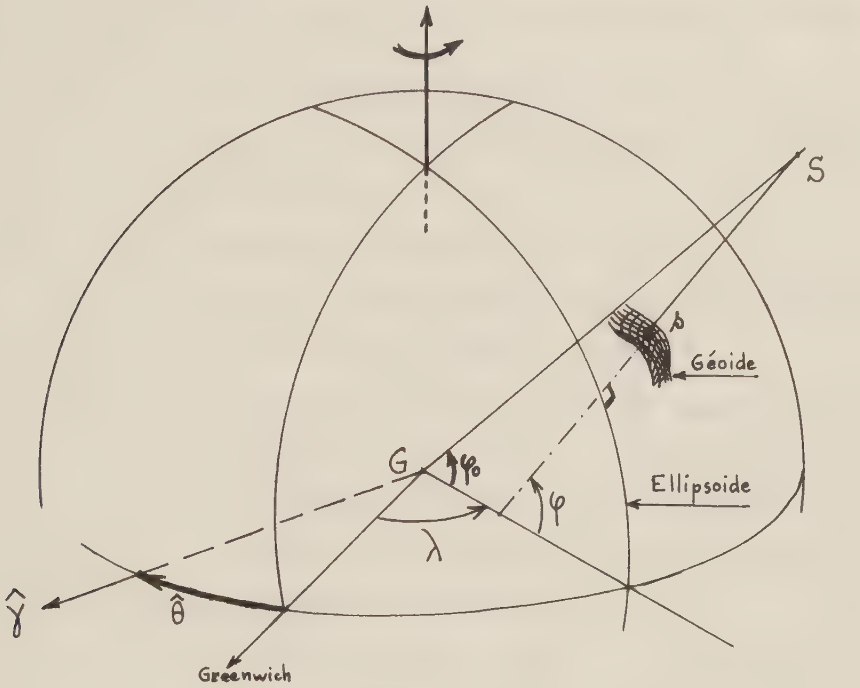


fig. 17 : Géométrie d'une mesure altimétrique

* Supposant une précision de 1 m sur la mesure altimétrique (envisageable actuellement) on peut alors effectuer l'analyse, pour quelques types d'orbite donnés, des problèmes suivants :

- Possibilité, avec une densité d'observations laser et doppler à déterminer, de restituer l'altitude du satellite au-dessus de l'ellipsoïde de référence avec une précision de 1 m ; ceci est indispensable si l'on veut pouvoir bénéficier de mesures ayant cette précision,

- Importance d'une certaine méconnaissance du frottement atmosphérique (dans le cas d'une orbite relativement basse : 500-600 Km), pour la restitution correcte

du géoide,

- nombre <u>optimum</u> de stations laser et doppler permettant de solutionner les problèmes précédents,

- apport de l'altimétrie elle-même comme information permettant de restituer l'orbite,

- précision de l'altimètre en tant qu'instrument de self-tracking (donc en vue d'une application fondamentale),

- sources d'erreurs au niveau :
  - de la mesure dans le cas de dérives et de discontinuités imprévisibles,
  - d'une certaine méconnaissance du potentiel réel (donc du géoide) : répercussions sur la précision avec laquelle on restitue l'altitude du satellite, et aussi sur la signification des profils obtenus.
  - d'une méconnaissance de la position précise de certaines stations d'observation dans la restitution de l'altitude.

Le tableau ci-dessous résume les conditions avec lesquelles les simulations permettant de répondre à ces questions ont été effectuées [25]

ORBITES	(1) 500 - 600 Km (périgée-apogée) Arcs de 2 jours		(2) 700 - 900 Km (Arcs de 2 jours)	(i = 60°)
MESURES	Type	cadence	Modèle d'erreur (simple)	
			partie systématique	bruit gaussien β
	laser	20 s	0.50 m	$- 0.50$ m $\leqslant \beta \leqslant + 0.50$ dans 66% des cas.
	Doppler 150-400 MHz [48]	20s (comptage = 10 s)	0.1 cycle	$- 0.1 \leqslant \beta \leqslant 0.1$ cy (à 66%)
	altimètre	1/2 à 1mn	0.50 m	$- 0.50$m $\leqslant \beta \leqslant + 0.50$m (à 66%)
Forces perturbatrices	Potentiel terrestre Harmoniques sphériques : S.E.II du SAO / GEM$_2$ du GSFC		Frottement Atmosphérique modèle de Jacchia [37]	

Les mesures altimétriques ne sont générées qu'au-dessus des océans; nous avons donc, à partir de données dans des carrés de 5° x 5° [27] , calculé le développement de la fonction - océan en harmoniques sphériques jusqu'au degré 36 (cf. [26] , annexe D).

Dans le tableau qui suit, nous donnons quelques réponses aux problèmes posés, obtenues principalement par correction différentielle d'orbite utilisant des mesures simulées [26] .

PROBLEME	ORBITE	STATIONS	ALTIMETRIE	RESIDUS δH	K	REMARQUES
estitution de 'altitude	700-900	9L + 3D	non	0.30 m	—	pas de frottement
nportance du rottement	500-600	6L + 3D	non	0.80 m	0.912	Modèle Jacchia bruité, S/M modifié de 10% [37]
tude de la ouverture ptimale	500-600	12L+ 11D	non	0.65 m	bien restitué	Couverture imparfaite par introduction de contraintes externes. (pannes, conditions météo) -ceci pour <u>tous</u> les tests sur orbite basse- OPTIMUM = 5L+3D
	500-600	5L + 8D	-	0.71 m		
	500-600	6L + 3D	-	0.82 m		
	500-600	5L + 3D	-	0.83 m		
	500-600	3L + 1D	-	2.09 m		
	500-600	2L	-	8.17 m	0.83	
Apport de l'altimétrie	500-600	3D	oui	< 1 m	0.914	
	500-600	2L	oui	< 1 m	0.906	
Self-tracking	"	rien	oui	< 1 m	0.912	1) orbite initiale décalée de 100 m
	"	rien	oui	< 1 m	0.912	2) orbite initiale décalée de 2 Km Altimètre coupé 1 révo/2

ROBLEME	ORBITE	STATIONS	ALTIMETRIE	RESIDUS δH	K	REMARQUES
urces d'erreur de détério- tion des ré- ltats						
dérives sur l'altimètre	500-600	5L + 3D	{ oui / non }	on re- trouve les déri- ves dans les 2 cas.	0.912	-3 m $\leqslant$ dérives $\leqslant$ +3 m ;variations brusques toutes les 60 mn envi- ron ⟹ Elles peu- vent être restituées
potentiel mal connu 1	500-600	5L + 3D	non	petites varia- tions = les ter- mes ajou- tés.	O.K.	. Simulation : SE1I + termes de fréquence > 25 . Traitement : SEII
2	"	"	non	résidus importants reflétant exactement l'écart entre les géoides	"	. simulation : SE II . Traitement : GEM 2 — Différences pour n < 15
position des stations d'observation	500-600	5L + 3D { 2L déca- lés et 3D déca- lés }	non	$\geqslant$ 2.5 m (arc trop court)	0.912	Décalages stations de - 5 à + 5 m sur φ, λ, h. Mauvaise resti- tution de leur position (arc trop court)
abilisation tive par jets gaz	I N A C C E P T A B L E					Forces résidu- elles { 10 s par 45 mn } — Plan orbite 3.10^{-3} N ; $\perp$ plan 3.10^{-3} N

Légende :

L = station laser

D = station doppler

δH = moyenne quadratique des résidus altimétriques

K = coefficient multiplicatif du frottement, (ajusté pour rendre compte d'une méconnaissance du produit $C_x \cdot \frac{S}{M}$ du satellite).

SE II = modèle du potentiel de la Standard Earth II (SAO 1969) = développement en harmoniques sphériques jusqu'à (16,16) , [34] .

GEM2 = modèle de potentiel n° 2 du GSFC (jusqu'à 16 - 16); [47] .

Il apparaît donc que la connaissance actuelle du potentiel terrestre et la précision actuelle des mesures permettent de mener à bien une campagne altimétrique et de tirer tout le bénéfice d'une mesure d'altitude précise à 1 m près. Il est clair que les mesures de tracking seront plus précises d'ici le lancement d'un satellite altimétrique, et que les résultats seront améliorés en conséquence.

Le fait remarquable qu'il faut noter est la possibilité de déterminer une orbite de satellite à l'aide de l'altimétrie seule. On bénéficie en effet : de l'aplatissement terrestre, de l'excentricité de l'orbite, et on se positionne par rapport aux détails de la surface du géoide. Le paramètre le plus mal déterminé actuellement par cette méthode est Ω (longitude du noeud de l'orbite), mais on peut compter sur une précision de self-tracking croissant avec la résolution spatiale du géoide (obtenue progressivement).

2.3.5 - Traitement statistique élaboré des données altimétriques.

L'utilisation scientifique principale des premières mesures altimétriques sera la détermination du géoide à la surface des océans, puis partout à l'aide des solutions existantes obtenues dynamiquement par satellites, et à l'aide également des mesures gravimétriques.

Les problèmes qui se posent sont les suivants : étant données des mesures d'altimétrie, donc de quantité Δh^i effectuées dans une région $\mathcal{R}$ de la surface du globe, calculer :

- soit Δh aux points d'une grille de $\mathcal{R}$, ou en certains points particuliers ;
- soit une expression : $\widetilde{\Delta h}(\varphi,\lambda) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell F^\ell(\varphi,\lambda)$

  caractérisant la dérive analytique de Δh (la tendance) dans cette région - les F^ℓ sont donnés, les a_ℓ sont inconnus,
- soit une moyenne : $\overline{\Delta h}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\text{aire}(\mathcal{R})} \iint_{\mathcal{R}} \Delta h \; d\sigma$.

Etant donné la cadence des mesures, ainsi que l'influence identique de la surface de la mer sur tous les points d'un profil donné, ou les erreurs systématiques apparaissant lors de la restitution des Δh^i (méconnaissance du potentiel de référence, de la position des stations d'observations ...), les méthodes classiques de moindres carrés doivent être abandonnées.

L'amélioration la plus importante que l'on puisse apporter à ces techniques est la considération des corrélations entre les mesures, représentées par

la fonction d'autocorrélation $H(\psi)$ du champ Δh sur $\mathcal{R}$:

$$H(\psi) = \frac{1}{\text{aire}(\mathcal{R})} \iint_{\mathcal{R}\,(PP' = \psi)} \Delta h(P)\ \Delta h(P')\ d\sigma \quad . \qquad (26)$$

Cette fonction peut être prise égale à la fonction d'autocorrélation $\mathcal{H}(\psi)$ de Δh sur la sphère entière si $\mathcal{R}$ est étendue (par exemple si $\mathcal{R} = \mathcal{S}$), déduite de la représentation du potentiel en harmoniques sphériques ; sinon l'étude des produits

$$C(\delta\psi) = \int_{\mathcal{P}} \Delta h(\psi)\ \Delta h(\psi + \delta\psi)\ d\psi$$

sur un profil $\mathcal{P}$, ou l'ajustement a priori de fonctions à décroissance rapide, peut donner une expression de $H(\psi)$. Diverses méthodes ont ainsi été étudiées.

En ce qui concerne la détermination de la dérive $\sum_{\ell} a_{\ell} F^{\ell}$, le choix des fonctions F^{ℓ} peut être conditionné par une analyse harmonique (par transformée de Fourier, par exemple) des données Δh^{i} . Les méthodes et programmes correspondants ont été respectivement analysés et préparés.

Enfin, utilisant les mêmes outils (définis ci-dessus), deux méthodes de filtrage linéaire peuvent être employées : la méthode des moindres carrés généralisés (exposée par exemple dans [36] , et reprise par nous-mêmes en [2] et [26]), et la méthode de krigeage due à G. Matheron [43] ; suivant cette méthode, on considère (à une petite échelle), que certains détails du géoide peuvent être regardés comme aléatoires - bien que, physiquement, la forme du géoide soit parfaitement définie -. La hauteur Δh est donc décomposée en une partie fixe $\widetilde{\Delta h}$, ou "dérive", et une partie aléatoire ; plus précisément, Δh devient un processus stochastique non stationnaire.

Nous avons développé les deux aspects de ces problèmes de manière très détaillée en [26] ; le tableau de la page suivante résume et compare les résultats obtenus dans chaque cas.

L'aspect le plus important qu'il nous faut souligner pour les applications est la vérification des hypothèses que l'on introduit en choisissant une expression mathématique particulière:

+ pour la covariance $H(\psi)$ d'une part

+ pour la dérive (choix des F^ℓ), d'autre part,

et ceci quelle que soit la théorie descriptive envisagée pour le champ Δh.

Il est vraisemblable qu'il faudra attendre les premières campagnes altimétriques (telle que celle de Geos C) pour estimer les covariances, car elles ont leur source :

- au niveau de l'orbite du satellite : il y a évidemment des erreurs systématiques pour chaque passage, mais on peut penser que la différentielle de chaque profil a un caractère aléatoire. Les mesures sont très corrélées ($H(P,Q)$ non nul) le <u>long d'un profil</u>, mais sans doute statistiquement indépendantes d'un profil à un autre (... pour ce qui est de l'orbite).
- au niveau du géoide : la décomposition de la forme du géoide en une partie aléatoire et une tendance certaine a un caractère arbitraire fonction de l'échelle à laquelle on regarde les choses. Selon que la région $\mathcal{R}$ considérée est prise plus ou moins grande, certains traits structuraux du champ Δh seront pris en charge par la dérive $\sum_\ell a_\ell F^\ell$, ou par la covariance.
- au niveau de l'instrument de mesure et des vagues, car le temps de transit dans les répondeurs, donc la précision de la mesure, dépend de l'état de la mer.

N mesures Δh^i effectuées aux points P_i de coordonnées $(\varphi_i, \lambda_i) = x_i$

$\Delta h =$ vecteur (Δh^i)

covariances $H(x,y)$ connues

$H = (H_{ij}) = H(x_i, x_j)$ — matrice symétrique, définie, positive —

Moindres carrés généralisés $(\square)$		Krigeage (K)
« Recherche d'une représentation mathématique » $a_{(\square)} = \Pi F^T H^{-1} \Delta h$ $cov_{a_{(\square)}} = \Pi$	**Prédiction Analytique** $\tilde{\Delta h}(P) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell F^\ell(P)$ $a =$ vecteur inconnu (a_ℓ) $F =$ matrice $(N \times n)$ des mesures $= \{F^\ell(P_i)\}$ $\Pi = (F^T H^{-1} F)^{-1}$: (matrice $n \times n$)	« Estimation de la valeur moyenne d'un processus stochastique non stationnaire $\Delta h(P)$ » $a_{(K)} = a_{(\square)}$ $cov_{a_{(K)}} = \Pi$
$\tilde{\Delta h}_{P(\square)} = H_P^T H^{-1} \Delta h$ $\sigma^2_{P(\square)} = H_0 - H_P^T H^{-1} H_P$	**Prédiction Ponctuelle** en $P(x_0)$: $\tilde{\Delta h}_P$ $H_P = \{H(x_0, x_i)\}_i \in \mathbb{R}^N$ $H_0 = H_{PP}$	**Krigeage ponctuel** $F_0 = \{F^\ell(x_0)\}$ $\varpi = \Pi (F_0 - F^T H^{-1} H_P)$ $\tilde{\Delta h}_{P(K)} = \tilde{\Delta h}_{P(\square)} + \varpi^T F^T H^{-1} \Delta h$ $\sigma^2_{P(K)} = \sigma^2_{P(\square)} + (F_0^T - H_P^T H^{-1} F)\varpi$ $= \sigma^2_{P(\square)} + \varpi^T \Pi^{-1} \varpi$
$\tilde{\overline{\Delta h}}_{(\square)} = \overline{H}^T H^{-1} \Delta h$ $\tilde{\sigma}^2_{(\square)} = \overline{\overline{H}} - \overline{H}^T H^{-1} \overline{H}$	**Moyenne** $\overline{\Delta h}_R$: estimation $\tilde{\overline{\Delta h}}$ $\rho^2 \overline{\overline{H}} = \iiiint_{R \times R} H(PP')\, d\sigma\, d\sigma'$ $\overline{H} = \{H_i\} = \{ \frac{1}{\rho} \iint_R H(PP_i)\, d\sigma \}$	**Krigeage universel** $\mathcal{F} = \frac{1}{\rho} \iint_R \{F^\ell(x)\}\, d\sigma$ (vecteur) $\dot{\varpi} = \Pi (\mathcal{F} - F^T H^{-1} \overline{H})$ $\tilde{\overline{\Delta h}}_{(K)} = \tilde{\overline{\Delta h}}_{(\square)} + \dot{\varpi}^T F^T H^{-1} \Delta h$ $\tilde{\sigma}^2_{(K)} = \tilde{\sigma}^2_{(\square)} + \dot{\varpi}^T \Pi^{-1} \dot{\varpi}$

Comparaisons : Moindres carrés, Krigeage

2.3.6 - Utilisations futures de l'altimètre :

Ainsi que nous venons de le voir, l'altimètre peut concurrencer les techniques d'observation classiques depuis le sol, une fois que le géoide aura été finement déterminé.

Des altimètres de précision croissante permettent d'étudier des phénomènes océanographiques dans la mesure où le géoide pourra être finement déterminé (en absolu) par une autre méthode. Les techniques gradiométriques sont sans doute les plus prometteuses pour résoudre ce problème. Il apparaît certain que des instruments d'une telle précision, auquel on demandera de fournir une grande résolution spatiale, devront être placés à bord de satellites sur orbite basse (entre 200 et 300 Km), et donc munis d'un dispositif "drag-free". Les satellites "jumeaux" mesurant leur vitesse radiale sont, comme nous l'avons vu, une autre solution avantageuse.

Enfin, dans la mesure où l'on peut obtenir un écho suffisant sur une surface différente de celle des océans, (mais peut-être avec moins de précision), un altimètre permet d'effectuer la topographie de certaines régions d'une planète.

Cette technique, déjà utilisée avec succès autour de la lune (altimètre d'Apollo 15) pourrait être employée pour la topographie des calottes glaciaires de la Terre, et même pour déterminer la forme géométrique des planètes. Il semble que l'embarquement de tels altimètres soit possible sur des satellites qui seraient lancés autour de Vénus ou de Mars.

3 - CONCLUSION GENERALE

Notre souci principal tout au long de cette étude fut de fournir un ensemble d'outils aux géophysiciens. Le principal d'entre eux est évidemment une représentation du potentiel à propriétés régionalisées, facile d'emploi et d'extension très souple, qui puisse être utilisée dans les problèmes d'inversion liés à cette discipline. Les deux types de représentation étudiés ici satisfont plus ou moins ces différents critères.

Notre effort s'est porté essentiellement sur la représentation du champ gravitationnel terrestre par masses ponctuelles. Un grand pas a été franchi en plaçant des masses aux extrêma (a priori connus d'après un développement en harmoniques sphériques) du champ des anomalies de gravité. Un des problèmes les plus difficiles était de représenter à la fois correctement le champ en surface et le champ extérieur (pour la trajectographie des satellites). Un progrès a été réalisé en déterminant les paramètres du modèle à l'aide de toutes les informations contenues dans la Standard Earth II du S.A.O.. Les profondeurs ayant été préalablement calculées, simultanément par quelques essais successifs, puis séparément pour les extrêma du champ les plus importants, nous avons déterminé les valeurs de 126 masses à l'aide de 154 830 équations portant sur : le potentiel et ses dérivées sur une grille de points situés entre 300 et 1500 Km, les hauteurs du géoide et les anomalies de gravité à la surface terrestre. Le modèle ainsi obtenu est satisfaisant ; le géoide est en particulier parfaitement restitué et nous avons pû déterminer avec précision une orbite du satellite Geos A à l'aide d'observations laser effectuées pendant 8 jours, depuis 5 stations,

durant la campagne ISAGEX.

La représentation du potentiel par fonctions harmoniques spéciales (très régionalisées), résolue jusqu'au degré 22 (du point de vue de son équivalence avec les harmoniques sphériques), pose quelques problèmes pour son extension. Jusqu'à présent, et même dans le cas d'une configuration particulière de points, nous ne pouvons procéder, pour leur obtention, que par inversion d'un très grand système linéaire. Cette dernière technique est de toute façon la seule envisageable dans le cas d'extensions locales de la résolution spatiale ...

Ces deux formulations semblent bien appropriées à l'utilisation de mesures altimétriques effectuées par satellites. Le succès de l'altimètre de la mission Apollo 15 et l'imminence de telles expériences (plus précises) autour de la Terre nous ont fait approfondir ce domaine. L'altimétrie est une technique hautement efficace (en précision et résolution) pour sa contribution à la détermination du potentiel, puisqu'elle donne accès quasi directement au géoide dans ses parties océaniques. Les simulations effectuées sur l'influence de la couverture d'observations faites du sol, la cadence des mesures altimétriques, l'influence des modèles de référence et des erreurs du système ont montré que l'on était à même de bénéficier de mesures de 1 m de précision, même dans des circonstances relativement défavorables. L'altimétrie s'avère être en particulier un moyen très puissant de détermination automatique de trajectoires.

L'utilisation d'un satellite très bas (muni d'un système de compensation des forces superficielles - non gravitationnelles-) à la détermination fine d'anomalies du champ de gravité sur des arcs très courts semble pour l'instant douteuse, tant du point de vue technologique (précision - et fréquence - d'un système Doppler) que du point de vue scientifique (problème de modélisation d'un champ de référence suffisamment fin,

ordre de grandeur même des anomalies par rapport à ce champ).

Par contre, deux satellites identiques placés sur orbite basse (300 Km) distants de 150 - 200 Km et mesurant leur vitesse radiale relative avec une précision de l'ordre de 0.04 mm/s permettent une détermination globale, rapide et fine (résolution spatiale d'environ 200 Km) du potentiel terrestre, indépendamment de toute autre technique. Par conséquent une telle méthode, alliée à l'altimétrie, permet d'effectuer des mesures océanographiques puisque les géoides déterminés par poursuite de satellite par satellite et par altimétrie diffèrent d'une quantité dépendant de la surface de la mer (houles longues, courants, salinité, pression atmosphérique ...)

Un certain nombre d'études mathématiques intéressantes, fondement ou sous produit des problèmes que l'on vient d'examiner, ont été effectuées. Nous avons ainsi introduit quelques méthodes de traitement statistique évolué de certains types de données : par moindres carrés généralisés ou par krigeage ; ces deux points de vue ont été rassemblés, développés (matriciellement) et comparés. Des techniques d'analyse harmonique ont parallèlement été mises au point, utiles dans l'analyse des longues séries temporelles et dans la recherche des fonctions d'autocorrélation d'un champ dépendant de plusieurs paramètres. La méthode des groupes et le traitement des contraintes dans le cadre des moindres carrés ont été appliqués à d'autres domaines de la géodésie.

Le problème de l'inversion des grandes matrices a été résolu avec succès et appliqué : à la détermination des masses de notre représentation,

à l'obtention des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques des fonctions harmoniques régionalisées.

Nous avons également développé une technique particulière de calcul des fonctions de Legendre jusqu'à des degré et ordre élevés - (100, 100) au moins - ainsi que des programmes d'analyse en harmoniques sphériques très performants. Ce sont des outils fondamentaux en géophysique et ils ont été utilisés à la construction de la fonction océan, au développement en série de la topographie terrestre, etc ...

Enfin, point n'est utile d'avoir une modélisation très précise du champ de gravité terrestre ou des autres forces agissant sur un satellite si l'on est incapable d'en connaitre l'effet sur la trajectoire avec une précision équivalente, surtout à long terme. Nous avons donc été conduits à développer une méthode récente d'intégration numérique très précise et qui s'est avérée très stable dans l'intégration des équations de Lagrange et de Gauss de la mécanique céleste (sous forme entière). Un système de référence adapté aux contraintes actuelles de la géodynamique ayant été défini (prise en compte de toutes les forces de Coriolis et d'entrainement [4]), l'application de cette méthode d'intégration numérique à différentes études est jusqu'à présent très satisfaisante.

Bien d'autres problèmes restent à étudier, par exemple la possibilité de déterminer avec précision la profondeur des masses trouvées dans notre représentation, puis leur interprétation ; le mélange des données altimétriques et de poursuite de satellite par satellite et la manière d'en extraire des informations océanographiques ... toutes choses qui sont à présent étrangères à la géodésie et qui appartiennent à la géophysique.

REFERENCES

(1) - BALMINO G. Différentes représentations du potentiel terrestre (Novembre 1969, GB/013/CB/GRGS/Meudon).

(2) - BALMINO G. Mesures gravimétriques et représentation du potentiel (Texte de deux conférences faites au C.N.E.S./Janvier & Février 1970)

(3) - BALMINO G. Choix d'un repère absolu en géodésie spatiale (Janvier 1971/G.R.G.S/Meudon - Communication présentée aux Journées Luxembourgeoises de Géodynamique.)

(4) - BALMINO G Coriolis Forces in Numerical Integration of Satellite Orbits, and Absolute Reference System (à paraitre dans "Celestial Mechanics")

(5) - BALMINO G. Méthode d'intégration numérique de Bulirsch et Stoer. (Septembre 1969, GB/0.530/CB/MT)

(6) - BALMINO G. Intégration numérique des Equations de Lagrange - Applications diverses - (Février 1972/G.R.G.S/Meudon)

(7) - BALMINO G. Programmes de tracé du géoide (Septembre 1970, GB/1.084/CB/MT).

(8) - BALMINO G. Représentation graphique des surfaces (Décembre 1972, G.R.G.S/C.N.E.S/en préparation).

(9) - BALMINO G. Méthode des moindres carrés et équations de contrainte (Janvier 1970, GB/0.587/CB/MT).

(10) - BALMINO G. Analyse des matrices de covariances en géodésie géométrique - Application à Geole - (Novembre 1971, /G.R.G.S/ Meudon)

(11) - BALMINO G. Moindres Carrés et Méthode des groupes - Application du programme "GIN" (Décembre 1971, GB/2.224/CB/G.R.G.S).

(12) - BALMINO G. Problèmes pratiques en analyse harmonique (Septembre 1970, GB/0.528/CB/MT).

(13) - BALMINO G. Utilisations des Equations aux variations en géodésie par satellites - (Août 1970, /G.R.G.S./Meudon/).

(14) - BALMINO G. Etude de certains problèmes numériques - Programmes correspondants (Observatoire de Meudon et C.N.E.S. - 1969 à 1971 - en préparation).

(15) - BALMINO G. Problèmes pratiques dans la résolution des systèmes linéaires - (Juillet 1970, GB/1.083/CB/MT).

(16) - BALMINO G. Sur les trajectoires de satellites artificiels soumis à l'attraction de masses enterrées (Juillet 1970, GB/ZK/0.406/MT/CB).

(17) - BALMINO G. Le programme "DIABOLO" (Décembre 1970, GB/2.215/CB/G.R.G.S., & G.R.G.S./BY/1972/101).

(18) - BALMINO G. & BRACHET G. Projet "Diabolo". Etude paramétrique (Janvier 1972, G.R.G.S/Meudon/ et G.R.G.S./C.N.E.S./).

(19) - BALMINO G. & BRACHET G. Proposition de satellites avec altimètre radar - Projet "DORADE" (Juillet 1970, C.N.E.S/MT/GB/AC/0.372).

(20) - BALMINO G. Representation of the Earth Potential by buried Masses (3rd Symposium on the Use of Artificial Satellites for Geodesy ; Washington, avril 1971 - A.G.U., Geophysical monograph 15)

(21) - BALMINO G. Techniques de poursuite de satellite par satellite (La Recherche Spatiale, vol. X, n° 6, Nov/Déc 1971, Dunod Ed. Paris).

(22) - BALMINO G. Future Technics in Satellite Geodesy and Geophysics - (Mars 1972, Journées Luxembourgeoises de Geodynamique).

(23) - BALMINO G. A new point masses model for the Earth's gravity field. (International Symposium on Earth gravity Models and Related Problems ; Août 1972 - Sr-Louis, Missouri, USA).

(24) - BALMINO G. Représentation du potentiel terrestre par masses ponctuelles - (1970 - 1972, G.R.G.S/Observatoire de Meudon/).

(25) - BALMINO G. & ROUCHER P. Chaîne de Simulation et de Traitement "Dorade" - (Novembre 1972, PR/GB/2.234/CB/G.R.G.S.).

(26) - BALMINO G. Mesures Altimétriques et Potentiel Terrestre. (Août 1972, GB/2.249/CB/GRGS).

(27) - BALMINO G., K. LAMBECK & W. KAULA Spherical Harmonic Analysis of the Earth Topography (G.J.R., 1973 - sous presse -).

(28) - BARLIER F. Communications personnelles (1972)

(29) - BRACHET G. International Satellite Geodesy Experiment - Experiment Plan (Novembre 1970, GB/0.631/MT).

(30) - BRACHET G. & BROSSIER C. Réduction des données laser françaises d'ISAGEX - (Bulletin G.R.G.S. n° 4, Mai 1972).

(31) - CHASSAING J.P. & A. ROUMIGUIER Description d'un programme de correction différentielle utilisant l'intégration numérique - (1970, JPCH/AR/0.339/CB/MT).

(32) - DUFOUR H.M. Représentation du potentiel terrestre par des développements harmoniques excentrés (Mai 1969, A.I.G., Symposium de Trieste).

(33) - DUFOUR H.M. & KOVALEVSKY J. Formulation pratique du champ de gravité terrestre par des fonctions régionalisées (Décembre 1970, Compte rendu de contrat DRME/ADOP).

(34) - GAPOSCHKIN E.M. & LAMBECK K. 1969 Standard Earth II (Mai 1970, S.A.O. Special Report n° 315).

(35) - GARDNER J.A., BECKMAN J.C., BROWN W. et al. Earth Physics Satellite Radar Altimeter Study (NASA Report)

(36) - HEISKANEN W.A. & MORITZ H. Physical Geodesy (W.H. Freeman and C°.Ed., San Francisco, 1966).

(37) - JACCHIA L.G. Modèle de densité atmosphérique (dans S.A.O. Special Report n° 170).

(38) - KOVALEVSKY J. & BARLIER F. Géodésie terrestre et Géodésie par satellites (Avril 1967, Space Science Reviews 7 - 1967 - 69 - 134, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht - Pays-Bas).

(39) - KOVALEVSKY J. Proposal to N.A.S.A. for participation in Geos C radar altimeter experiment (G.R.G.S., Septembre 1971, Annexe : Juin 1972).

(40) - LEVALLOIS J.J. Géodésie Générale, T.3 : Le champ de la pesanteur (1970, Eyrolles Ed., Paris).

(41) - LUNDQUIST C.A. Satellite Altimetry and Orbit Determination (S.A.O., Special Report n° 248).

(42) - LUNDQUIST C.A. & GIACAGLIA G.E.D. Possible Geopotential Improvement from Satellite Altimetry (1969, S.A.O. Special Report n° 294).

(43) - MATHERON G. Le krigeage universel (1969 - Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule 1 Ed. E.N. Supérieure des Mines de Paris).

(44) - MICHAEL W.H. et al. Results on the mass and the gravitational field of the moon as determined from dynamics of lunar satellites - (Mai 1969, COSPAR XII, Prague).

(45) - NOUEL F. A propos du Doppler - (Avril 1972, FN/4.045/CB/GRGS)

(46) - PIEPLU J.L. & SAGE R. Rapport final : chaîne "Geole" (C.D.C., Marché n° 71, CNES-253 ; Juillet 1971).

(47) - WAGNER C.A., SMITH D.E. & al. Gravitational Field Model for the Earth (GEM. 1 & 2) (Mai 1972, COSPAR XV, Madrid).

Contribution à l'amélioration du potentiel terrestre. Choix d'une représentation - Techniques nouvelles de détermination.

Introduction .... page 5

1 - REPRESENTATION DU POTENTIEL TERRESTRE

1.1 - Idée générale 9

1.2 - Représentation par masses ponctuelles 11

1.2.1 - Les différents modèles 16

1.2.2 - Le géoide obtenu et la représentation des trajectoires 19

1.3 - Représentation par fonctions harmoniques spéciales 30

1.3.1 - Le Formalisme 30

1.3.2 - Principaux résultats 32

1.4 - Conclusion 34

2 - ETUDE DE CERTAINS SYSTEMES

2.1 - Satellite très bas à trainée compensée 36

2.2 - Poursuite de satellite par satellite 41

2.3 - Altimétrie 46

2.3.1 - Principe 46

2.3.2 - Contraintes 46

2.3.3 - Systèmes envisagés 47

2.3.4 - Missions (premiers altimètres) 52

2.3.5 - Traitement statistique élaboré des données 59

2.3.6 - Utilisations futures de l'altimètre 63

3 - CONCLUSION GENERALE 64

Références 68

A Monsieur THIRY qui a suivi mes études depuis leur début et qui me fait l'honneur de présider le jury, j'adresse toute l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie particulièrement Monsieur BARLIER qui a suivi tous mes travaux de recherche et m'a permis de les mener à bien.

Je remercie Monsieur NAHON qui s'est vivement intéressé à notre travail et nous a fait profiter de ses conseils.

Cette étude a été effectuée au sein du Groupe de Recherches de Géodésie Spatiale. Je remercie Monsieur KOVALEVSKY qui a dirigé mes recherches et Monsieur LEFEBVRE pour l'intérêt constant qu'ils y ont porté, et dont les idées m'ont été précieuses.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur BRACHET pour son efficacité et sa collaboration amicale et constante.

J'adresse mes remerciements à Monsieur ROUCHER pour l'aide qu'il m'a apportée dans la seconde partie de ce travail.

Je remercie les directeurs et responsables des centres de calcul de l'I.N.A.G. à l'Observatoire de Meudon, et du C.N.E.S. à Brétigny, qui ont fait preuve de beaucoup de compréhension envers l'utilisateur exigeant que je fus parfois.

Ma reconnaissance va aussi à tous mes collègues qui ont contribué à l'édification et à la présentation des résultats de cette étude, en particulier Messieurs ALBUISSON, GAUTHIER, KOHLER.

L'achèvement d'un tel travail suppose la réalisation de tâches ingrates ; j'en remercie les personnes des services de secrétariat et de publication, en particulier Madame C. WIDMANN qui a effectué la plupart de la dactylographie.

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT :	ES SCIENCES
THESE DE :	PHYSIQUES

NOM : Monsieur BALMINO

Prénoms : Georges

né le 9 Février 1945 à Guben ~~xxxxxx~~ Allemagne

1ère THESE : " Contribution à l'amélioration du potentiel terrestre: Choix d'une représentation et techniques nouvelles de détermination.

2e THESE (Propositions faites par l'Université) :

PRESIDENT.M.THIRY
EXAMINATEURS.M.NAHON
M.BARLIER
KOVALEVSKY

ACADÉMIE DE PARIS UNIVERSITÉ PARIS VI

Vu et Approuvé

PARIS, le 6 Avril 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI

Sc. 3e c. 72-09